ENCICLOPEDIA UNIVERSALE

o

REPERTORIO DIDASCALICO

Volume Terzo

ENCICLOPEDIA UNIVERSALE

O

REPERTORIO DIDASCALICO

OPERA NECESSARIA

AD OGNI ORDINE DI PERSONE

PARTE SECONDA

VOLUME I.

PRATO
TIPOGRAFIA ALDINA
1869

ARITMETICA

In questa parte noi abbiamo cominciato dal premettere alcune cose generali sui numeri e su varii sistemi di numerazione, ponendo in evidenza i caratteri propri di ciascuno e paragonando i vantaggi che se ne possono aspettare effettuando i calcoli i più complicati. Abbiamo dato nel 4 § la pratica delle quattro regole fondamentali dell'aritmetica senza trattenersi troppo a lungo sopra di esse, persuasi che non possa sequistarsi con una semplice lettura ciò che richiede un lungo esercizio. Un poco più a lungo ci siamo trattenuti sui numeri primi e sui caratteri di divisibilità dei numeri dando una tavola dei numeri primi minori di 10000, e quella dei divisori dei numeri sino a 5900 avanti di trattare delle operazioni dell'aritmetica sulle frazioni ordinarie. Nei 4 e 5 § abbiamo poste le frazioni decimali e riportata una tavola che serve alla riduzione delle frazioni ordinarie in decimali e viceversa, quindi abbiamo accennato il calcolo dei numeri complessi. Le prove delle operazioni aritmetiche ci hanno dato occasione di riprodurre secondo ai metodi fondati sulle proprietà dei numeri 9 e 11, quelli si originali dovuti all'illustre Chauchy che abbiamo tutti riuniti nel § 6.

Trattate così le operazioni elementari dell'aritmetica abbiamo mostrato la formazione della seconda e terza potenza e la estrazione della radice seconda e della radice terza, aggiungendo anco una tavola che contiene i quadrati, i cubi, le radici quadrate e le radici cubiche dei numeri interi da 1 a 100. Abbiamo trattato delle potenze e delle radici in generale solo quel tanto che era necessario per intendere la teoria delle progressioni e dei logaritmi, alla quale abbiamo dato quella maggiore estensione che i limiti dell'opera ci permettevano. Abbiamo sviluppate queste teorie nei § 8 e 9 con tale ampiezza che vorremo contribuisse pure a rendere più popolare l'uso delle tavole logaritmiche nei calcoli aritmetici. Abbiamo esposte le proprietà dei rapporti per differenza e per quoziente, delle equidifferenze e degli equiquozienti e delle progressioni per differenza e per quoziente, mettendo a confronto le analogie dei risultati che si ottengono dal considerare le due specie di rapporti. Abbiamo mostrato come da queste analogie ha avuto origine la teoria dei logaritmi e la costruzione delle tavole. Abbiamo aggiunto a una piccola tavola di logaritmi una istruzione per il modo di adoprarle; abbiamo dato un saggio delle tavole di Lalande, la descrizione ed il modo di adoperare le grandi tavole di Callet, un saggio delle tavole logaritmiche di Vronski e la descrizione della riga pei calcoli numerici, la graduazione e l'uso della quale si riporta alla teoria dei logaritmi.

Terminiamo ciò che è relativo all'aritmetica con alcuni cenni istorici e bibliografici.

PRELIMINARI. Si chiama quantità o grandezza tutto ciò che può essere sottoposto a misura. Le lunghezze, le superficie, i volumi dei corpi, il tempo, ec. sono quantità.

Oggetto delle matematiche è la misura delle grandezze. Ora per paragonare tra loro le grandezze di quantità della

stessa natura, bisogna riferirle ad un termine di confronto il quale prende il nome di unità di misura, ed esaminare quante volte l'unità di misura è contenuta nella quantità da misurare. Il resultato di questo esame è il *numero*, il quale è intero se l'unità è contenuta una o più volte esattamente nelle quantità da misurare.

L'aritmetica è la scienza dei numeri.

§. 1. *Dei diversi sistemi di numerazione.*

NUMERAZIONE ORDINARIA. La numerazione ha per oggetto di esprimere tutti i numeri con parole distinte il che costituisce la *numerazione parlata*, e di rappresentarli con caratteri distinti il che costituisce la *numerazione scritta*.

Nel nostro sistema di numerazione dieci unità di un ordine qualunque ne formano una dell'ordine immediatamente superiore; così dieci unità semplici valgono una diecina, dieci diecine un centinaio, dieci centinaia un migliaio, e così seguitando. A partire dalle migliaia, si conta per unità diecine centinaia di migliaia; per unità diecine centinaia di milioni, di bilioni, di trilioni; cambiando nome di tre in tre ordini. È del resto assai raro dover ricorrere a dei numeri più grandi dei bilioni. Così prendendo per unità la grossezza di un capello supposto eguale alla 25.mo parte di un millimetro l'intero giro del globo terrestre sarebbe espresso da una sola unità di trilione.

Il nostro sistema di numerazione scritta ci è stato insegnato dagli Arabi, i quali l'avevano tolto dall'India, come dell'umano sapere; ed è fondato: 1° sull'invenzione delle nove *cifre*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

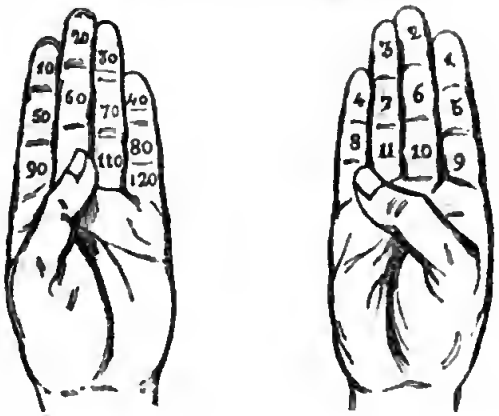
per rappresentare i primi nove numeri: 2° sulla convenzione che una cifra posta immediatamente a sinistra di un altra rappresenti unità dieci volte più grandi di quelle espresse dalla cifra che la precede: 3° sulla convenzione di porre il carattere 0 che non ha alcun valore per indicare il posto dei differenti ordini di unità che potrebbero mancare, e per conservar così alle altre cifre il loro valore di posizione.

La regola per scrivere un numero enunciato, consiste nello scrivere separatamente partendo dalla sinistra le centinaia diecine unità di ogni classe, ponendo degli zero invece degli ordini di unità che mancano.

Per enunciare un numero scritto bisogna dividerlo in classi di tre cifre, andando da destra verso sinistra, dove l'ultima classe potrà avere meno di tre cifre; quindi si enuncieranno cominciando da sinistra le centinaia diecine e unità di ciascuna classe col nome della classe alla quale appartengono.

NUMERAZIONE DUODECIMALE. È chiaro che la convenzione fondamentale che dieci unità di un ordine qualunque valgano una dell'ordine immediatamente superiore, potrebbe essere sostituita da un altra qualunque convenzione analoga. E come in una linea si contano dodici punti, in un pollice dodici linee, in un piede dodici pollici ec. si potrebbe su questo principio formare un sistema duodecimale nel quale la base 12 che contiene esattamente i numeri 2, 3, 4, 6 avrebbe sostituito la base dieci forse con qualche vantaggio per la facilità dei calcoli. Così il sistema decimale adottato unanimemente da tutti i popoli civilizzati, non ha alcun carattere assoluto di superiorità sopra gli altri, e sembra che l'origine di questo sistema sia dovuto al numero dei diti delle nostre mani.

Tuttavia Carlo Fourier (l'autore del trattato di associazione domestica e agricola) sostiene che le nostre mani sono positivamente ed esclusivamente conformate per la numerazione per dodici, facendo osservare che in ciascuna mano abbiamo quattro diti composti ciascuno di tre articolazioni o falangi, e un quinto dito fuora di linea e opposto a questi, il pollice, destinato alla funzione di contatore in questi calcoli fatti sulle dita; che in ciascuna mano possiamo segnare distintamente i dodici primi numeri come si vede nella figura, e prendendo l'una per contar l'unità, l'altra potrebbe servire nel modo stesso a contare le dozzine, in modo che noi potremmo contare sulle nostre mani fino a dodici volte dodici, o ancora tredici volte dodici, numero che nel sistema decimale chiamiamo centocinquantasei. La posizione dei



pollici nella figura indica *dieci dozzine* e *dodici unità* cioè il numero cento trenta due del sistema decimale. Chi si compiaccia di tenor dietro a tutte queste induzioni, potrà vedere l'articolo *aritmetica* redatto da Abele Transon nella *Encyclopédie nouvelle de MM. P. Leroux e J. Reynaud*.

SISTEMA BINARIO. Tra tutti i sistemi di numerazione possibili il più singolare è senza dubbio quello al quale può darsi il nome di binario, perchè non esige che l'uso dei due caratteri 0 o 1 per rappresentare tutti i numeri. In esso la cifra 1 salendo di un posto verso sinistra acquista un valore di due in due volte più grande. Così i numeri che noi rappresentiamo con le cifre

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ec.

si rappresentano nel sistema binario con

1, 10, 11, 100, 101, 110,
111, 1000, 1001, 1010, ec.

L'aritmetica binaria dà la spiegazione di un simbolo chinese, che ha nome Je-kim o Je-king (libro delle mutazioni) attribuito a Fohi il più antico legislatore della nazione chinese. Questo simbolo composto di 64 figure formate ciascuna con 6 linee orizzontali sovrapposte avea messo a tortura l'ingegno dei letterati chinesi e degli eruditi europei, senza che avessero potuto darne una spiegazione sodisfacente, quando l'illustre Leibnizio, paragonando i caratteri del Je-kim alla serie dei numeri naturali scritti nel sistema binario, riconobbe che questa aritmetica bastava ad interpetrare l'enigma, il quale non conteneva altro che i 64 primi numeri scritti nel sistema di numerazione che ha per base due, intervertiti dal loro ordine naturale. L'unità essendo difatti rappresentata da una linea orizzontale semplice ———, e lo zero da una linea interrotta — —; e convenendo di esprimere i diversi ordini di unità scrivendoli dal basso in alto, invece che da destra a sinistra, il zero posti in alto non alterano il valore dei caratteri ai quali sono soprapposti; per cui i caratteri chinesi composti di sei linee orizzontali e riportati qui sotto possono essere interpretati come segue.

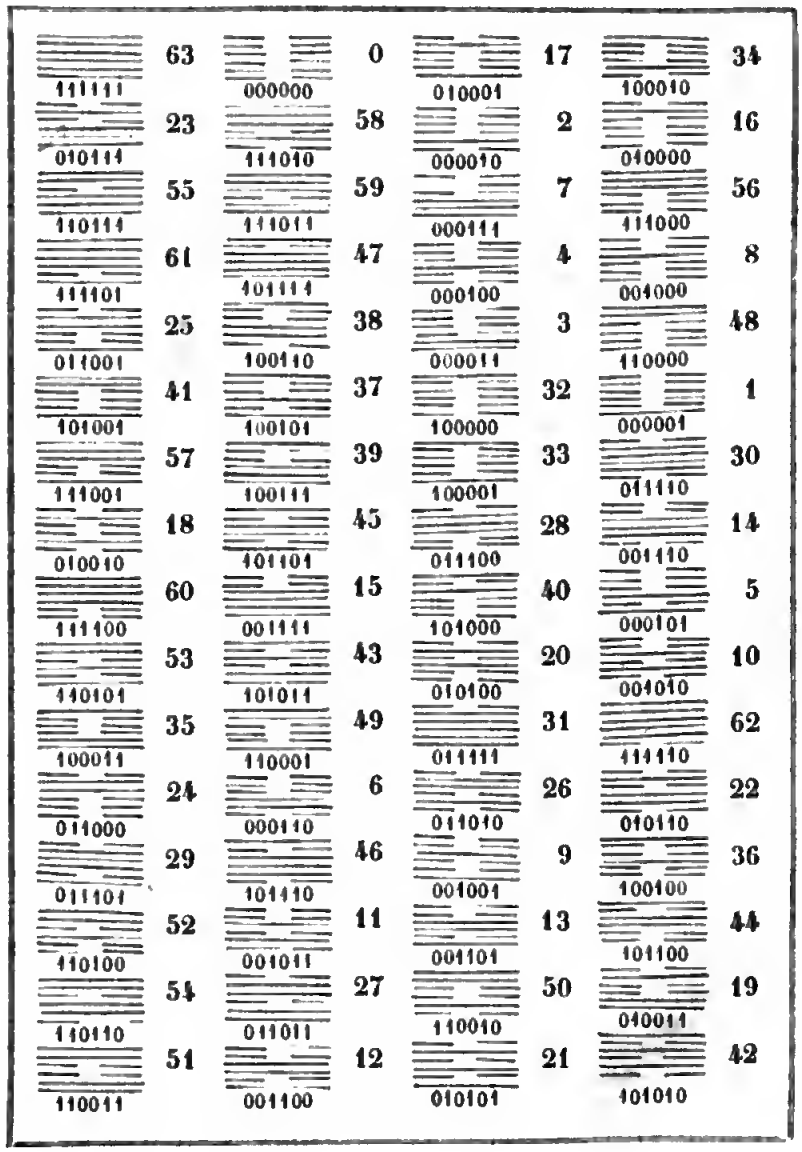
Caratteri chinesi.	*Traduzione nel sistema binario.*	*Valore.*
	000000	0
	000001	1
	000010	2
	000011	3
	000100	4

e così seguitando.

Il quadro sottoposto contiene le 64 figure del Je-Kim di Fohi; al disotto di ciascuno dei caratteri chineai è posta la traduzione nel sistema binario come dovrebbe scriversi secondo Leibnizio, ed accanto il valore di ciascun simbolo in cifre ordinarie.

TAVOLA DELLE SESSANTAQUATTRO FIGURE

Contenute nel *Je-Kim*, o libro delle Mutazioni, attribuito all'imperatore chinese Fo-hi, e interpetrato da Leibnizio per mezzo dell'aritmetica binaria.



Leibnizio che voleva adottato il sistema binario nei calcoli più complicati, vedeva in questo enigma decifrato con tanto ingegno un'imagine della creazione tratta dal nulla per la volontà di Dio, nel modo stesso che i numeri tutti sono generati in questo sistema dallo zero e dall'unità. E questa fantasia gli piacque talmente, che persuase il P. Bouvet missionario nella China a svilupparla davanti all'imperatore regnante per convertirlo al cristianesimo. Citiamo questo come curioso documento dell'aritmetica binaria, senza pretendere in modo alcuno di giustificare quest'applicazione di cattivo guato della scienza ai misteri della religione.

Il sistema binario dimostra a prima vista una importante proprietà dei numeri, che consiste nel potersi formare tutti i numeri interi con la serie dei numeri 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 ec. ognuno dei quali è doppio di quello che lo precede; così coi numeri 1, 2, 4 si formano 3, 5, 6, 7 respettivamente uguali 3 ad 1 più 2; 5 uguale a 4 più 1; 6 uguale a 4 più 2; 7 uguale a 4 più 2 più 1. Nel modo stesso che coi numeri 1, 2, 4 si fanno tutti gli interi da 1 fino a 7, o 8 meno 1; coi numeri della serie riportati qui sopra 1, 2 ec. fino a 128 si formerebbero tutti gli interi da 1 fino 255, o 256 meno uno.

I numeri della progressione tripla

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 ec.

hanno una proprietà analoga la quale consiste nel poter formare tutti gli interi possibili sommando o sottraendo i numeri della progressione in un certo modo; così con 1, 3, 9, si formano 2 uguale a 3 meno 1; 4 uguale a 3 più 1; 5 uguale a 9 meno 3 meno 1; 6 uguale a 9 meno 3; 7 uguale a 9 più 1 meno 3; 8 uguale a 9 meno 1; 10 uguale a 9 più 1; 11 uguale a 9 più 3 meno 1; 12 uguale a 9 più 3; 13 uguale a 9 più 3 più 1 con cui si arriva fino alla metà di 26; e per giungere a 26 basterà torre da 27 quarto termine della progressione tutti i numeri formati precedentemente. Coi numeri 1, 3, 9, 27, 81, 243, si arriverebbe fino a 364 metà di 728.

SISTEMI POSITIVO-NEGATIVI. Questa importante proprietà della progressione tripla, si dimostra semplicissimamente per mezzo di un sistema di numerazione scritta nel quale le cifre possono indicare delle quantità da sottrarre o negative, come delle quantità da aggiungere o positive. Così dietro la convenzione che una lineetta sovrapposta ad una cifra $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, indichi che la cifra con il suo valore di posizione deve esser sottratta, si possono scrivere tutti i numeri del sistema decimale con le prime 5 cifre significative 1, 2, 3, 4, 5 e con il carattere 0: 6 sarebbe espresso da $1\overline{4}$ (10 meno 4), 7 da $1\overline{3}$ (10 meno 3), 8 da $1\overline{2}$ (10 meno 2), 9 da $1\overline{1}$ (10 meno 1). Questa convenzione applicata al sistema di numerazione ternaria, dove ogni cifra salendo di un posto a sinistra acquista un valore 3 volte più grande, dà il modo di scrivere tutti i numeri coi caratteri 1, $\overline{1}$ e 0. Le cifre 1 o $\overline{1}$ non possono in questo sistema avere altri valori che quelli della progressione tripla 1, 3, 9, 27, 81 ec.

Così i numeri naturali

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

saranno rappresentati dai segni

$1, 1\overline{1}, 10, 11, 1\overline{1}1, 1\overline{1}0, \overline{1}11, 10\overline{1}, 100, 101$

queste identità che abbiamo stabilite anco di sopra possono scriversi più brevemente adottando il segno + che si pronunzi più, il segno − che si pronunzia meno, e il segno $=$ eguale per rappresentare l'eguaglianza di due quantità. Queste identità sono

$1 = 1$	$6 = 9 - 3$
$2 = 3 - 1$	$7 = 9 - 3 + 1$
$3 = 3$	$8 = 9 - 1$
$4 = 3 + 1$	$9 = 9$
$5 = 9 - 3 - 1$	$10 = 9 + 1$

Talora questa proprietà del sistema delle progressioni ternarie si utilizza dai commercianti per fare con un numero il più piccolo possibile di pesi differenti tutti i pesi possibili. Questi pesi sono

1, 3, 9, 27, ec.

i quali repartiti sui due piatti di una bilancia o combinati nel modo che abbiamo di sopra mostrato, servono a dare tutte

le misure che possono essere espresso in numeri interi.

§ 2. *Delle quattro regole fondamentali dell' aritmetica.*

L' ADDIZIONE è una operazione che ha per oggetto di riunire più numeri in un solo il quale è la somma o il totale degli altri.

Quest'operazione si fa ponendo gli uni sotto gli altri i numeri da sommare, in modo che le unità dello stesso ordine si corrispondano in colonna verticale, quindi prendendo la somma delle unità contenute in ogni colonna, cominciando dalle unità dell' ordine inferiore, e passando a quelle degli ordini superiori successivi, segnando questa somma sotto la colonna corrispondente, avendo però cura di portare alla colonna seguente le unità di ordine superiore a quelle della colonna su cui si opera.

Per questa regola così semplice basta l'esempio seguente.

7856	Numeri da sommare
4972	
3547	
6451	
22826	Somma o totale.

Il segno + rappresentando l'addizione si pone 7856+4972+3547+6451= 22826.

LA SOTTRAZIONE ha per oggetto di trovare la differenza che passa tra due numeri.

Questa *differenza* o *resto* si ottiene togliendo il numero minore dal maggiore. Se le cifre del numero minore da sottrarre sono in ciascun ordine minori di quelle corrispondenti del numero sul quale si fa la sottrazione, l'operazione si eseguisce prendendo la differenza delle cifre corrispondenti. Così indicando la sottrazione col segno — (*meno*) si avrà 7 — 3 = 4; 19 — 8 = 11, 321 — 120 = 201.

L'operazione si dispone generalmente nel modo che segue:

846349	*Numero da cui si sottrae.*
231227	*Numero da sottrarre.*
615122	*Resto* o *differenza.*

Se una delle cifre del numero superiore, è più piccola della cifra corrispondente del numero inferiore si aumenta quella di dieci unità, e si diminuisce di una unità la prima cifra significativa che si trova alla sua sinistra; considerando come nove li zeri intermedi se ve ne sono.

Esempi:	782539	730004
	257153	214538
	525386	515466

Quando si deve al tempo stesso fare la somma di più numeri e sottrarne la somma di più altri, si può condurre l'operazione senza passare per le addizioni parziali. Allora fondati su questo principio evidente che il resto di una sottrazione non cambia aggiungendo o togliendo la quantità stessa a ciascuno dei numeri sui quali si opera, si dispone l'operazione come nell'esempio seguente:

256243	A. numeri da sommare.
84564	
3252	
26858	
102942	
3654	B. numeri da torre.
2308	
262503	Resto

La somma delle cifre della prima colonna B è 14; vi si aggiunge 6 e si considera come 20. La somma delle cifre della prima colonna A aggiuntevi pure 6 e 23; si segna la differenza 3 e non si porta nulla: la somma delle cifre della seconda colonna B è 9 e si considera come 10 aggiungendovi 1: la somma delle cifre della seconda colonna A aggiuntovi 1 è 20; si segnerà la differenza 0 e si porterà 1 alla terza colonna: la somma delle cifre della terza colonna B è 18, si considera come 20 aggiungendovi 2: la somma delle cifre della terza colonna A aggiuntovi 2 è 19 e 1 che portavo 20, la differenza è zero e non si porta nulla; la somma delle cifre della quarta colonna B è 7 e aggiungendovi 3 si fa 10; la somma delle cifre della quarta colonna A aggiuntovi 3 è 22; si segna la differenza 2 e si porta 1; nella quinta colonna B la somma è 0; nella quinta colonna A la somma è 15 e 1 che si porta 16; si segna 6 e si porta 1; finalmente la sesta colonna B da la somma 4; e la sesta

colonna A da 2 e 1 che porto 3; la differenza è 2.

LA MOLTIPLICAZIONE è una operazione con la quale si ripete un numero che si chiama *moltiplicando* tante volte quante sono le unità di un numero chiamato *moltiplicatore;* il resultato della operazione dicesi *prodotto;* o più generalmente in questa operazione il *prodotto* si compone col numero chiamato moltiplicando, nel medesimo modo che il moltiplicatore è composto con l'unità.

Il moltiplicando e il moltiplicatore sono i fattori del prodotto.

Il prodotto di un numero qualunque di fattori non cangia qualunque sia l'ordine nel quale si fanno le operazioni. Il segno della moltiplicazione è $\times$ che si pronunzia moltiplicato per, e che è necessario di non confondere con $+$ (*più*). Si avrà dunque $5 \times 7 \times 3 = 5 \times 3 \times 7 = 7 \times 5 \times 3$ ec. Qualunque sia l'ordine dei fattori.

TAVOLA DI PITAGORA

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Quando due fattori di un prodotto non hanno che una sola cifra, il prodotto si trova immediatamente per mezzo della tavola di Pitagora all'incontro della colonna verticale che comincia con uno dei fattori, e della colonna orizzontale che comincia con l'altro.

Quando il solo moltiplicando ha più cifre e il moltiplicatore una sola, si fanno i prodotti parziali del moltiplicatore per ciascuna cifra del moltiplicando cominciando da destra, per mezzo della tavola di Pitagora, portando le unità che provengono da questi prodotti agli ordini corrispondenti.

Esempio $986 \times 7 = 6902$. I calcoli si dispongono ordinariamente nel modo seguente,

$$\begin{array}{r} 986 \\ 7 \\ \hline 6902 \end{array}$$

e si procede dicendo: 7 volte 6 fa 42, si segna 2 e si porta 4; 7 volte 8 da 56 e 4 che si porta 60, si segna 0 e si porta 6; 7 volte 9 da 63 e 6 che si porta 69.

Il caso più generale della moltiplicazione è quello in cui il moltiplicando o il moltiplicatore hanno ciascuno più cifre. Allora si cercano i prodotti parziali dell'intero moltiplicando per ciascuna cifra del moltiplicatore come nel caso precedente; e si pone la prima cifra a destra di questi prodotti, nella stessa colonna verticale della cifra che ha servito a formare il prodotto.

L'esempio seguente mostra in qual modo debbono essere disposti i calcoli.

$$\begin{array}{r} 9216 \\ 789 \\ \hline 82944 \\ 73728 \\ 64512 \\ \hline 7271424 \end{array} \qquad \begin{array}{l} = 9216 \times 9 \\ = 9216 \times 80 \\ = 9216 \times 700 \\ = 9216 \times 789 \end{array}$$

Se vi sono delli zeri alla dritta dei fattori si fa la moltiplicazione senza tenerne conto, e si aggiungono quindi alla drit-

ta del prodotto; così per moltiplicare 357000 per 8900, si moltiplica 357 per 89, e ottenuto il prodotto 31773 di questi due numeri si aggiungono alla destra di esso 5 zeri il che ci da 3177300000 prodotto cercato di 357000 per 8900.

Nell' esempio seguente si tratta il caso nel quale i fattori contengono delli zeri.

$$\begin{array}{r} 549087 \\ 28006 \\ \hline 3294522 \\ 4392696 \\ 1098174 \\ \hline 15377730522 \end{array}$$

LA DIVISIONE è una operazione con la quale dato un prodotto che chiamasi *dividendo* e uno dei fattori che chiamasi *divisore*, si trova l' altro fattore che chiamasi *quoziente*. Quando si opera sugli intieri può dirsi che il quoziente si ottiene cercando quante volte il dividendo contiene il divisore.

La divisione si indica separando il dividendo dal divisore con due punti (:) o scrivendo il dividendo al di sopra del divisore così: $\frac{21}{7} = 21 : 7 = 3$.

Il quoziente si trova per mezzo della tavola di Pitagora, quando il divisore ha una sola cifra ed il dividendo non ne ha che due così: $\frac{72}{9} = 8$; $\frac{45}{5} = 9$. La divisione di 67 per 7 non si può fare esattamente, si trova il quoziente 9 e il resto 4; $67 = 9 \times 7 + 4$.

Quando il divisore ha una sola cifra e il dividendo più cifre, la divisione si decompone in divisioni parziali, che si eseguiscono come nel caso precedente. Così per trovare $\frac{2140}{5} = 428$, si disporranno le operazioni, o si dirà nel modo seguente:

$$\begin{array}{r|l} 2140 & 5 \\ 14 & \hline 40 & 428 \\ 0 & \end{array}$$

Il 5 nel 21 è contenuto 4 volte e avanza 1; abbasso il 4 accanto all' avanzo 1, il 5 nel 14 è contenuto 2 volte e avanza 4; abbasso il 0 accanto all' avanzo 4, il cinque nel 40 è contenuto 8 volte esattamente.

Il caso più generale della divisione, nel quale il dividendo o il divisore hanno più cifre, si risolve in una maniera analoga per mezzo di divisioni successive. Per dividere 21870 per 54 si dispongono i calcoli e si opera nel modo che segue:

$$\begin{array}{r|l} 21870 & 54 \\ 270 & \hline 0 & 405 \end{array}$$

54 nel 218 è contenuto 4 volte: si segna il 4 nel quoziente, quindi si dice facendo la moltiplicazione di 54 per 4 e sottraendo da 218: 4 volte 4 fa 16; al 18 vi è 2 che segno 2 e porto 1; 4 volte 5 fa 20 e 1 che porto 21, ai 21 0; abbasso il 7; il 54 nel 27 non ci sta, pongo 0 in quoziente e abbasso lo 0 del divisore accanto al resto 27; il 54 in 270 ci sta 5 volte, ripeto le operazioni che sopra: 5 volte 4 fa 20, al 20 ci è 0 e porto 2; 5 volte 5 fa 25 e 2 che porto 27; al 27 ci è 0; dunque si ha esattamente:

$$\frac{21870}{54} = 405$$

Può accadere che il divisore non sia contenuto nel dividendo esattamente come nell' esempio seguente:

$$\begin{array}{r|l} 47894599 & 8974 \\ 30245 & \hline 33239 & 5337 \\ 63179 & \\ 361 & \end{array}$$

Dividendo il numero dato 47894599 per 8974, si ottiene un quoziente 5337, ed un resto 361, il che indica che togliendo 361 dal dividendo il numero che si ottiene 47894238, conterrebbe esattamente il divisore 5337 volte e perciò si avrà:

$$47894599 = 8974 \times 5337 + 361$$

§ 3. *Frazioni ordinarie e divisibilità dei numeri.*

ORIGINE E PROPRIETÀ FONDAMENTALE DELLE FRAZIONI. La considerazione del resto 361 dell'esempio precedente conduce alle frazioni. Se si trattasse di fatti di dividere il numero 47 894 599

in 8 974 parti uguali il quoziente 5 337 non sodisfarebbe esattamente alla questione; e bisognerebbe completarlo aggiungendogli una certa parte dell'unità rappresentata da $\frac{361}{8974}$ che si enuncia trecentosessantuno ottomilanovecentosettantaquattresimi. Il numero 8974 che indica in quante parti uguali è stata divisa l'unità chiamasi il *denominatore*; 361 che esprime quante di queste parti si son prese è il *numeratore*; il numeratore e il denominatore sono i due termini della frazione.

Una frazione non cambia di valore quando si moltiplicano o si dividono i due termini di essa per uno stesso numero; ma se si moltiplica il numeratore o si divide il denominatore per 2 per 3 per 4. . . . la frazione divieno 2, 3, 4 volte più grande; al contrario la frazione diviene 2, 3, 4 volte più piccola, quando si divide il numeratore o si moltiplica il denominatore per 2, 3, 4.

È però importante, per semplificare le frazioni senza cambiare il valore loro, il cercare il più gran numero che divide ciascuno dei due termini esattamente, per cui bisogna conoscere i caratteri di divisibilità dei numeri.

NUMERI PRIMI. Chiamasi numero *primo* o fattore *primo* ogni numero che non è esattamente divisibile che per se stesso e per l'unità: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 sono fattori primi. Eratostene dotto geometra che fioriva al principio del 2° secolo avanti l'era cristiana, fu il primo che indicò un metodo semplice ed ingegnoso per determinare tutti i numeri primi. Egli dava il nome di vaglio alla operazione con la quale escludeva tutti i numeri composti, conservando solamente quelli primi. Questa operazione consiste nello scrivere la serie dei numeri dispari (poichè tutti i numeri pari sono divisibili per due). Si cancellano da questa serie tutti i composti contando da 3 in 3, da 5 in 5, da 7 in 7, da 11 in 11, da 13 in 13, da 17 in 17, e così seguitando. La tavola seguente rappresenta i resultati delle operazioni; i numeri composti sono contrassegnati con una linea (—) sopra ciascuno di essi.

3	5	7	$\overline{9}$	11	13	$\overline{15}$	17	19
$\overline{21}$	23	$\overline{25}$	$\overline{27}$	29	31	$\overline{33}$	$\overline{35}$	37
$\overline{39}$	41	43	$\overline{45}$	47	$\overline{49}$	$\overline{51}$	53	$\overline{55}$
$\overline{57}$	59	61	$\overline{63}$	$\overline{65}$	67	$\overline{69}$	71	73
$\overline{75}$	$\overline{77}$	79	$\overline{81}$	83	$\overline{85}$	$\overline{87}$	89	$\overline{91}$
$\overline{93}$	$\overline{95}$	97	$\overline{99}$	101	[illegible]	$\overline{105}$	107	109
$\overline{111}$	113	$\overline{115}$	$\overline{117}$	$\overline{119}$	$\overline{121}$	$\overline{123}$	$\overline{125}$	127
$\overline{129}$	131	$\overline{133}$	$\overline{135}$	137	139	$\overline{141}$	$\overline{143}$	$\overline{145}$
$\overline{147}$	149	151	$\overline{153}$	$\overline{155}$	157	$\overline{159}$	$\overline{161}$	163
$\overline{165}$	167	$\overline{169}$	$\overline{171}$	173	$\overline{175}$	$\overline{177}$	179	181
$\overline{183}$	$\overline{185}$	$\overline{187}$	$\overline{189}$	191	193	$\overline{195}$	197	199
$\overline{201}$	ec.							

Abbiamo posto qui sotto una tavola dei numeri primi compresi tra 1 e 10000.

TAVOLA DI TUTTI I NUMERI PRIMI CHE SONO COMPRESI TRA 1 E 10000.

1	31	79	31	91	41	$\overline{5}$	67	31	91	69	19	91	61	29
2	37	83	37	93	51	$\overline{07}$	73	33	99	71	31	$\overline{7}$	69	39
3	41	89	39	97	57	11	79	39	$\overline{5}$	77	41	$\overline{01}$	73	53
5	43	97	49	99	63	13	83	43	03	87	43	09	87	57
7	47	$\overline{1}$	51	$\overline{2}$	69	17	89	49	09	93	47	19	97	59
11	53	$\overline{01}$	57	11	71	31	97	57	21	99	53	27	$\overline{8}$	63
13	59	03	63	23	77	37	$\overline{4}$	61	23	$\overline{6}$	59	33	$\overline{09}$	77
17	61	07	67	27	81	47	$\overline{01}$	63	41	01	61	39	11	81
19	67	09	73	29	83	49	09	67	47	07	73	43	21	83
23	71	13	79	33	93	53	19	79	57	13	77	51	23	87
29	73	27	81	39	—	59	21	87	63	17	83	57	27	—

9	23	59	19	57	21	63	47	37	79	63	71	37	47	37
07	29	67	01	69	33	69	59	01	91	51	77	61	51	43
11	31	71	07	73	47	71	61	09	93	53	89	73	53	47
19	37	79	13	81	57	99	71	19	99	93	49	79	57	53
29	49	83	31	87	59	30	73	27	41	48	03	81	59	67
37	59	97	33	93	63	01	89	33	11	07	09	97	69	73
41	77	16	49	97	71	11	91	39	27	13	19	83	83	79
47	79	01	51	23	77	19	34	61	29	17	31	03	89	89
53	83	07	73	09	83	23	07	67	33	19	33	09	93	91
57	89	09	79	11	87	37	13	59	39	23	37	23	87	61
71	91	13	87	33	89	41	33	79	53	47	43	33	01	01
77	97	19	93	39	93	49	49	93	57	49	51	47	11	13
83	13	21	97	41	99	61	57	97	59	51	57	51	17	21
91	01	27	99	47	27	57	51	38	77	57	57	81	37	31
97	03	37	20	51	07	79	63	03	42	83	69	87	41	33
10	07	57	03	57	11	83	67	21	01	91	73	93	43	43
09	19	63	11	71	13	89	59	23	11	97	87	99	49	51
13	21	67	17	77	19	31	91	33	17	46	93	88	79	63
19	27	69	27	81	29	09	99	47	19	03	99	07	83	73
21	51	93	29	83	31	19	38	51	29	21	80	13	91	97
31	57	97	39	89	41	21	41	53	31	37	03	17	88	99
33	73	99	53	93	49	37	17	63	41	39	09	19	61	62
39	81	17	63	99	53	63	27	77	43	43	11	31	07	03
49	99	09	69	24	67	57	29	81	53	49	21	37	13	11
51	14	21	81	11	77	69	33	81	59	51	23	41	21	17
51	09	23	83	17	89	81	39	39	61	57	39	43	27	21
63	23	33	87	23	91	87	41	7	71	63	51	49	39	29
69	27	41	59	37	97	91	47	11	73	73	59	71	43	47
87	29	47	99	41	28	32	57	17	83	79	77	77	49	57
91	33	53	21	47	01	03	59	19	89	91	81	79	51	53
93	39	59	11	59	03	09	71	23	97	47	87	83	57	59
97	47	77	13	67	19	17	81	29	43	03	99	88	81	71
11	51	83	29	73	33	21	53	31	27	21	81	01	67	77
03	53	87	31	77	37	29	93	43	37	23	01	03	59	87
09	59	89	37	28	43	51	36	47	39	29	07	07	79	99
17	71	18	41	03	51	53	07	57	49	33	13	19	81	63
23	81	01	43	21	57	57	13	89	57	51	19	21	97	01
29	83	11	53	31	51	59	17	40	63	59	47	27	89	11
51	87	23	51	39	79	71	23	01	73	83	53	31	03	17
53	89	31	79	43	87	99	31	03	91	87	57	57	23	23
63	93	47	22	49	97	33	37	07	97	89	71	63	27	29
71	99	61	03	51	29	01	43	13	44	93	79	59	39	37
81	16	67	07	57	03	07	59	19	09	99	89	73	53	43
87	11	71	13	79	09	13	71	21	21	48	97	81	81	53
93	23	73	21	91	17	19	73	27	23	01	82	91	87	59
12	31	77	37	93	27	23	77	49	41	13	09	86	60	51
01	43	79	39	26	39	29	91	51	47	17	27	23	07	57
13	49	89	43	09	53	31	97	59	51	31	31	39	11	73
17	53	—	51	17	57	43	—	73	57	51	33	41	29	79

Digitized by Google

89	61	83	21	93	76	53	81	29	86	19	49	93	98	67
97	73	99	27	79	03	67	01	53	09	21	59	11	11	69
64	79	69	29	11	07	73	11	63	23	31	67	19	21	81
21	89	07	51	17	21	77	17	69	27	37	91	23	33	87
27	91	11	59	33	39	79	23	77	29	39	91	37	39	91
49	67	17	77	51	43	83	47	87	41	49	03	41	47	98
51	01	47	87	57	49	79	61	89	47	61	09	43	51	03
69	03	49	93	59	69	01	67	84	63	63	27	49	87	11
73	09	59	72	77	73	07	71	19	69	67	33	71	96	17
81	19	61	07	81	81	19	79	23	67	87	37	77	01	29
91	33	67	11	87	87	27	91	20	81	93	51	91	13	33
65	37	71	13	89	91	33	82	31	89	89	57	97	19	39
21	61	77	19	99	99	37	09	43	93	23	61	94	23	51
29	63	83	29	75	77	49	19	47	99	29	73	03	29	57
47	79	91	37	07	03	51	21	61	87	33	81	13	31	59
51	81	97	43	17	17	63	31	67	07	41	87	19	43	71
53	91	70	47	23	23	93	33	88	13	51	99	21	49	83
63	93	01	53	29	27	80	37	01	19	63	92	31	61	87
69	68	13	83	37	41	09	43	13	31	69	03	33	77	99
71	03	19	97	41	53	11	63	21	37	71	09	37	79	01
77	23	27	73	47	57	17	69	27	41	99	21	39	89	07
81	27	39	07	49	59	39	73	37	47	90	27	61	17	23
99	29	43	09	59	89	53	87	39	53	01	31	63	97	29
66	33	57	21	61	93	59	91	43	61	07	41	67	19	31
07	41	69	31	73	78	69	93	63	79	11	57	73	21	41
19	57	79	33	77	17	81	97	73	83	13	77	79	33	49
37	63	71	49	83	23	87	83	81	88	29	81	91	39	67
53	69	03	51	89	29	89	11	97	03	41	83	97	43	73
59	71	09	69	91	41	93	17	99	07	43	93	—	49	

Per adoprar questa tavola è necessario osservare, che le cifre in caratteri più grandi messe tra linee orizzontali indicano le centinaia dei numeri, e che le due ultime cifre di questi numeri sono quelle scritte al disotto delle centinaia.

Due numeri si dicono primi tra loro quando non hanno altro divisore comune che l'unità.

MASSIMO COMUNE DIVISORE. Per trovare il più gran divisore comune di due numeri si possono decomporre nei loro fattori primi tentando la divisione per i numeri dati dal vaglio di Eratostene; il numero cercato è il prodotto di tutti i fattori primi comuni ai due numeri dati: questi fattori primi entreranno nel prodotto tante volte quanto sono ripetuti in quello dei numeri dati che li contiene meno volte.

Così cercando il più gran comune divisore di 84 e di 360 si ha $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$, e $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$; e il divisore comune cercato è $2 \times 2 \times 3$ o 12; la frazione $\frac{84}{360}$ può dunque ridursi alla forma $\frac{7}{2 \times 3 \times 5} = \frac{7}{30}$ e questa è irriduttibile.

Si sarebbe potuto trovare il numero 12, seguendo un altro processo, il quale consiste nel dividere prima 360 per 84 il che da un quoziente 4 e un resto 24; quindi 84 per 24 che ci da un quo-

ziente 3 e un resto 12; e seguitando 24 per 12 che da un quoziente esatto 2.

Il resto 12 che precede il quoziente esatto è il più gran divisore comune di 84 e 360; le operazioni si dispongono come nella tavola accanto:

360	84	24	12	resti successivi.
	4	3	2	quozienti successivi.
30	7	2	1	

I termini $\frac{7}{30}$ della frazione $\frac{84}{360}$ ridotta a più semplice espressione si possono ottenere ponendo al disotto del quoziente ultimo 2 l'unità, che esprime il 12 ossero contenuto in se stesso una volta; al disotto del quoziente 3 il prodotto del quoziente 2 per questa unità che è 2; al disotto del quoziente 4 il prodotto del quoziente 3 per il 2 ottenuto, aumentato di 1 che è 7; al disotto del 360 il prodotto del quoziente 4 per 7 aumentato di 2 che è 30.

DIVISIBILITA' DEI NUMERI. I caratteri di divisibilità di un numero per un altro sono utilissimi per facilitare la ricerca dei fattori semplici dei numeri, e la riduzione delle frazioni alla loro più semplice espressione. Quelli che si pongono ordinariamente a profitto sono i seguenti.

Un numero è divisibile per 3 o per 9, quando la somma delle sue cifre considerate per il loro valore assoluto è divisibile per 3 o per 9.

Tutti i multipli di 5 terminano per 0 o per 5.

Tutti i numeri che terminano a destra con due cifre, l'insieme delle quali è divisibile per 4 o per 25, sono divisibili per 4 o per 25.

Tutti i numeri nei quali l'ultima classe di tre cifre a destra è divisibile per 8 o per 125, sono divisibili per 8 o per 125.

Un numero è divisibile per 11, se la differenza tra la somma delle sue cifre di posto pari, e quelle delle cifre di posto dispari è 0 oppure divisibile per 11.

Giova spesso non solo decomporre un numero in tutti i suoi fattori primi, ma trovare ancora tutti i divisori composti di questo numero.

L'esempio sottoposto offre l'andamento delle operazioni.

5040	1
2520	2
1260	2, 4
630	2, 8
315	2, 16
105	3, 6, 12, 24, 48
35	3, 9, 18, 36, 72, 144
7	5, 10, 20, 40, 80, 15, 30, 60, 120, 240, 45, 90, 180, 360, 720
1	7, 14, 28, 56, 112, 21, 42, 84, 168, 336, 63, 126, 252, 504, 1008, 35, 70, 140, 280, 560, 105, 210, 420, 840, 1680, 315, 630, 1260, 2520, 5040.

I divisori semplici o composti del numero 5040, sono dunque sessanta che scritti nell'ordine naturale di grandezza sono 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 56, 60, 63, 70, 72, 80, 84, 90, 105, 112, 120, 126, 140, 144, 168, 180, 210, 240, 252, 280, 315, 336, 360, 420, 504, 560, 630, 720, 840, 1008, 1260, 1680, 2520, 5040.

Esempio notabile il quale è tratto dagli scritti di Platone dialogo V, *de legibus*.

Una delle applicazioni più utili dei principii precedenti, consiste nel determinare un numero che sia il più piccolo possibile, e sia divisibile al tempo stesso per molti altri dati; questo numero contiene tutti i fattori semplici dei numeri dati; ognuno di questi fattori semplici è ripetuto tanto volte quante nel numero dato in cui è ripetuto più volte.

Così *il più piccolo multiplo* comune dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 è

$$1\times2\times3\times2\times5\times7\times2\times3=2520.$$

La tavola seguente che mostra tutti i più piccoli divisori dei numeri fino a 5900, accorcerà assai i calcoli relativi alla decomposizione in fattori primi, per quelli che sono al disotto di questo limite.

Questa tavola non contiene che i numeri il cui fattore più piccolo sorpassa 5, perchè i multipli di 2 di 3 di 5 si riconoscono a prima vista. I numeri sono posti nelle colonne N. La cifra delle migliaia, quando è posta una sola volta in ogni casa, si sottintende nei numeri successivi.

TAVOLA DEI PIÙ PICCOLI DIVISORI DEI NUMERI

FINO A 5900.

N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.	N.	D.
40	7	001	7	7007	7	1097	10	1771	7	1147	19	2407	17	3307	47	7119	11	0030	13	3807	10
77	7	563	11	1000	17	1901	13	781	79	149	7	881	41	969	19	103	91	001	93	903	17
07	7	039	10	7007	19	7009	7	799	17	799	17	007	49	970	19	197	43	503	11	009	1
990	7	017	20	4007	10	1097	11	799	7	107	11	099	10	991	46	109	7	300	7	991	57
731	11	999	7	1097	17	1499	19	907	70	777	19	310	7	991	7	211	13	909	59	910	1
900	7	999	17	1048	7	1417	17	7919	7	2170	41	3979	17	3999	11	0429	11	9577	7	4997	21
743	71	091	7	1097	7	1417	13	917	35	177	1	087	7	990	10	997	7	987	17	941	7
797	7	949	11	1097	71	1491	7	179	17	193	37	903	17	911	61	993	99	999	97	949	11
790	10	907	90	1079	39	1447	11	999	91	799	11	007	43	931	29	993	61	909	39	953	39
767	17	977	11	1070	73	1407	21	007	27	197	7	081	70	949	37	941	7	001	13	999	97
990	7	079	7	1997	23	1403	7	1917	7	2107	79	3999	11	4939	49	9967	17	0611	43	9981	11
909	17	990	13	1900	7	1499	13	946	79	907	51	507	17	989	7	990	13	913	7	911	11
917	7	097	17	1777	11	1177	7	940	43	999	11	986	7	941	17	989	7	993	19	979	99
991	73	793	19	1197	10	1907	76	999	77	979	1	079	91	947	7	977	99	941	11	917	41
947	13	797	7	7197	7	1907	17	909	17	917	17	901	99	901	10	991	13	947	1	919	93
993	11	713	23	1793	17	1079	17	1993	7	3909	99	1087	79	1099	11	3109	7	3043	41	0299	7
900	7	791	7	1730	17	1971	91	991	91	993	7	997	7	917	13	987	19	903	13	901	10
981	1	701	17	7141	7	1979	7	997	7	919	13	999	95	991	11	989	11	001	1	997	1
909	77	707	11	1747	91	1099	17	903	17	997	97	990	79	960	19	190	37	007	19	5099	19
990	13	719	7	1707	73	1007	10	999	43	991	1	011	7	987	49	911	7	979	10	991	99
997	7	790	7	1709	79	1947	33	9019	79	3999	57	3993	43	4089	7	3917	91	3980	89	4099	37
910	11	707	79	1109	7	1907	7	947	71	979	49	997	91	990	41	907	49	993	7	987	11
993	17	779	19	1777	71	1991	7	987	41	901	89	999	77	3007	91	941	13	709	7	909	1
979	7	701	11	1793	7	1979	17	997	13	993	11	909	7	913	49	949	17	701	11	949	19
941	13	791	7	1109	39	1971	13	999	7	900	7	947	79	917	7	999	1	719	47	991	91
949	1	793	13	1190	17	1199	1	1949	99	9977	7	9991	71	3990	19	3907	1	0791	91	4009	17
991	19	790	17	1997	17	1997	97	997	19	991	11	993	7	991	7	977	11	101	7	997	7
991	7	993	11	1771	7	7909	7	997	97	990	43	990	77	940	17	979	91	787	97	993	19
977	13	917	79	1179	99	1991	7	993	73	997	13	997	7	947	11	981	17	749	19	991	7
991	79	999	7	1947	11	1993	99	997	7	999	77	701	97	990	43	997	59	749	33	997	91
999	13	941	99	1949	71	1990	17	1999	11	9999	13	3797	11	3999	7	9401	19	9191	11	4097	17
997	17	947	7	1947	99	1949	91	997	7	999	7	799	7	971	97	499	61	797	19	199	11
999	7	997	99	1999	7	1949	79	997	11	993	77	797	7	979	7	499	7	799	39	199	7
997	1	999	11	1961	43	1991	19	9999	7	999	93	749	79	971	17	419	19	779	7	117	19
997	19	971	13	1997	7	1991	11	991	19	997	7	747	41	991	11	441	11	791	19	191	19
991	11	999	1	1977	97	1973	7	9993	7	3401	7	3799	91	9987	79	0437	43	0787	7	4193	1
999	7	999	19	1979	19	1979	33	999	49	997	29	791	71	191	7	491	47	791	17	141	41
474	11	999	19	1909	7	1991	41	941	79	419	19	771	77	193	49	497	7	799	49	147	11
487	13	997	17	1973	13	1997	7	947	13	479	41	779	41	197	13	499	19	999	19	191	1
499	79	979	11	1981	71	1991	19	991	7	499	1	779	1	119	11	449	11	911	91	199	39
997	7	917	7	1993	91	1799	73	1957	11	1497	11	9793	77	9197	99	3491	7	3917	11	4199	11
917	7	999	19	1391	7	1771	99	999	49	449	7	997	7	191	91	479	43	991	59	171	49
997	17	991	7	1999	19	7717	17	971	19	449	97	999	53	199	19	419	7	499	7	191	97
997	17	949	29	4949	11	1791	11	977	97	999	11	973	19	199	43	491	39	993	11	199	47
999	43	949	19	7949	19	1719	7	999	7	491	99	991	7	149	7	497	11	941	49	797	99
999	49	997	7	1991	7	1709	97	9797	11	1977	7	3991	77	9149	47	3499	7	3997	7	4199	99
999	7	991	31	1997	99	797	11	797	7	479	97	991	79	191	49	497	19	999	17	199	7
997	19	979	7	1993	93	797	7	177	19	499	19	999	11	197	1	999	91	993	59	199	19
999	7	979	79	1999	37	799	11	179	15	499	19	949	7	191	19	999	11	971	7	197	7
999	13	999	99	1979	7	799	99	799	17	491	47	995	7	179	19	991	7	949	11	119	11
N.	D	N.	D.	N.	D	N.	D	N.	D	N	D.	N.	D.	N.	D	N	D	N.	D.	N.	D

Seguito della Tavola precedente.

N.	D	N.	D	N.	D	N.	D	N.	D
5223	61	5389	67	5979	7	5219	17	5331	7
237	19	271	7	993	13	221	13	391	97
247	31	273	17	991	97	239	19	367	19
249	7	277	23	997	99	243	7	379	7
297	17	279	13	991	13	249	29	337	37
5277	7	5289	13	5997	7	5231	39	5393	7
279	11	991	53	913	17	237	7	997	25
291	7	997	17	921	7	293	19	399	11
291	11	999	11	927	13	291	23	413	13
293	13	913	7	939	11	299	11	299	71
5327	39	5919	31	5959	7	5227	17	5911	31
299	31	627	7	961	11	291	11	917	53
313	19	631	11	963	7	293	97	921	7
319	7	933	51	979	13	239	7	927	13
331	99	991	59	981	17	311	47	329	13
5331	31	5997	13	5991	7	5317	13	5933	53
333	7	999	7	997	19	321	17	939	7
343	53	691	31	5917	29	327	7	971	53
331	19	997	53	627	11	319	73	977	7
381	7	693	13	929	47	339	19	381	13
5397	11	5637	7	5933	7	5341	7	5947	11
399	17	999	37	941	71	313	33	699	61
319	29	739	17	947	7	337	11	737	13
381	13	711	7	933	81	339	23	713	21
387	61	717	93	937	13	393	31	719	7
5393	23	5797	29	5983	61	5399	7	5713	59
339	53	739	7	999	37	371	61	799	17
693	7	741	61	971	11	377	19	731	11
611	11	747	67	693	13	363	7	747	7
617	7	783	7	999	7	349	17	733	11
5697	19	5787	97	3093	11	5391	11	5739	13
623	53	793	11	181	19	611	7	761	7
633	11	799	19	117	7	623	13	797	73
639	23	771	13	123	67	629	61	771	29
633	91	777	17	129	13	647	13	773	23
5639	7	5781	7	5131	7	5633	7	5777	83
699	61	937	11	137	11	639	33	789	7
671	17	811	17	141	33	661	53	737	11
677	11	919	61	143	37	697	7	893	7
687	7	923	7	149	19	673	13	999	37
5699	97	5929	11	5139	7	5699	11	5919	11
699	11	937	7	191	13	691	17	921	7
391	7	941	47	173	7	697	23	933	19
811	13	943	29	177	31	999	7	937	13
333	7	947	37	183	71	313	37	993	11
5331	23	5949	13	5191	29	5333	11	5973	7
837	13	953	23	161	7	337	7	5987	7
851	19	939	53	993	11	339	29	3831	53
853	7	997	31	997	61	343	23	3893	71
333	86	973	11	913	13	349	31	5999	17
N.	D	N.	D	N.	D	N.	D.	N.	D

LE QUATTRO REGOLE APPLICATE ALLE FRAZIONI. Dopo di ciò il calcolo delle frazioni non offre alcuna dificoltà.

Per combinare un numero qualunque di frazioni per via di addizione o di sottrazione, si comincia dal ridurle al più piccolo denominatore comune; quindi si combinano i nuovi numeratori per via di addizione o di sottrazione a seconda dei segni delle operazioni indicato, e si da al resultato finale il nuovo denominatore.

Il più piccolo denominatore non è che il più piccolo multiplo comune a tutti i denominatori dati; e il nuovo numeratore di ciascuna frazione si ottiene moltiplicando l' antico per i fattori introdotti nel denominatore antico di ciascuna frazione per formare il denominatore comuno.

I calcoli si possono disporre nel modo che vedesi praticato per le frazioni

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{7}{8}-\frac{11}{12}$$

rispetto alle quali si cerca il resultato delle operazioni indicate.

Il minimo denominatore comune sarà

$$3\times 2\times 2\times 2=24$$

nuovi numeratori saranno

Per la 1ª frazione $2\times 2\times 2\times 2=16$
Per la 2ª $3\times 3\times 2 = 18$
Per la 3ª $5\times 2\times 2 = 20$
Somma 54
Per la 4ª $7\times 3. = 21$
Per la 5ª $11\times 2. = 22$
Somma 43
Differenza 11

Il resultato finale è dunque $\frac{11}{24}$.

Se vi fossero interi uniti con frazioni, si opererebbe separatamente su quelli; e se la frazione da torre fosse più grande di quella dalla quale deve esser fatta la sottrazione, si prenderebbero in presto dagli interi del numero dal quale si fa la sottrazione tante unità, che messe sotto forma di frazione bastassero alla sottrazione della quale si tratta.

È d' altronde evidente che per mettere un intero sotto forma frazionaria, dandogli un determinato denominatore, bisogna formarne il numeratore, moltiplicando l' intero per il denominatore che si vuole dare alla frazione.

La seconda definizione data della moltiplicazione per i numeri interi conviene pure alla moltiplicazione delle frazioni. Questa operazione si eseguisce moltiplicando fra loro i numeratori, e tra loro i denominatori delle frazioni delle quali si vuole il prodotto. Dalla prima di queste operazioni si ottiene il numeratore e dalla seconda il denominatore del prodotto cercato; i numeri interi sui quali può accadere di avere ad eseguire le operazioni, si considerano come frazioni il cui denominatore è l' unità.

$$\text{Così } \frac{3}{4}\times 7 = \frac{3\times 7}{4\times 1} = \frac{21}{4} = 5+\frac{1}{4}$$

$$6\times\frac{5}{11} = \frac{6\times 5}{1\times 11} = \frac{30}{11} = 2+\frac{8}{11}$$

$$\frac{4}{5}\times\frac{2}{3} = \frac{4\times 2}{5\times 3} = \frac{8}{15}.$$

Dovendo fare la moltiplicazione di interi uniti con frazioni per via di somma o di sottrazione; bisogna ridurre ad una sola frazione le diverse espressioni frazionarie di ciascuno dei due fattori. Sia per esempio $2-\frac{3}{4}$ da moltiplicare per $7+\frac{1}{3}$.

Si porrà $2-\frac{3}{4} = \frac{2\times 4-3}{4} = \frac{5}{4}$

$$7+\frac{1}{3} = \frac{7\times 3+1}{3} = \frac{22}{3}$$

$$\frac{5}{4}\times\frac{22}{3} = \frac{110}{12} = 9+\frac{1}{6}.$$

Il risultato finale si esprime più brevemente come qui sotto

$$\left(2-\frac{3}{4}\right)\left(7+\frac{1}{4}\right) = 9+\frac{1}{6}.$$

L' uso delle parentesi è indispensabile per non recar confusione sulle operazioni da fare.

La divisione delle frazioni si effettua con la stessa facilità che la moltiplicazione, purchè si abbia riguardo alle espressioni miste di interi e di frazioni, preparando le operazioni nel modo stesso che abbiamo praticato nella moltiplicazione. Essa divisione si effettua moltiplicando la frazione da dividere per far la frazione che rappresenta il divisore rovesciata.

$$\text{Così } \frac{4}{5} : 7 = \frac{4}{5} : \frac{7}{1} = \frac{4}{5}\times\frac{1}{7} = \frac{4}{35}$$

$$9 : \frac{2}{11} = \frac{9}{1} : \frac{2}{11} = \frac{9}{1}\times\frac{11}{2} = \frac{99}{2} = 49+\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3}\times\frac{7}{5} = \frac{14}{15}$$

$$\left(9+\frac{4}{6}\right) : \left(2-\frac{3}{4}\right) = \left(9+\frac{2}{12}\right) : \left(2-\frac{9}{12}\right)$$

$$= \frac{110}{12} : \frac{15}{12} = \frac{110}{12}\times\frac{12}{15} = \frac{110}{15} = \frac{22}{3} = 7+\frac{1}{3}$$

§ 4. *Delle frazioni decimali.*

NOTAZIONE E REGOLE FONDAMENTALI. Si chiamano *frazioni decimali* quelle che hanno per denominatore l' unità seguita da uno o più zeri.

Così $\frac{3}{10}$, $\frac{27}{100}$, $\frac{2957}{1000}$ sono frazioni decimali.

Si può estendere a queste frazioni uno dei principii fondamentali della numerazione scritta, ponendole sotto forma intera col sopprimere i denominatori, e dando alle cifre un valore di posizione; così il numero $47+\frac{3}{10}$ si può scrivere 47,3 contrassegnando con una virgola le unità, e separando con la medesima i tre decimi dalla parte intera. Nel modo stesso invece di $125+\frac{27}{100}$ si scriverà 125,27; invece di $\frac{2957}{1000}$ si scriverà 2,957.

Se mancasse la parte intera si porrebbe uno zero invece di essa; e si porrebbero pure degli zeri invece dei differenti ordini che potrebbero mancare a destra della virgola.

Per cui si avrà $\frac{295}{1000} = 0,295.$

$$\frac{38}{10000} = 0,0038.$$

$$\frac{2}{10000} = 0,0002.$$

Le regole per enunciare un numero decimale scritto, e per scrivere un numero decimale enunciato, si deducono immediatamente da quella data per i numeri interi e per le frazioni ordinarie.

Risulta dalla notazione dei numeri decimali che non si cambia il loro valore aggiungendo o togliendo un numero qualunque di zeri alla loro diritta; e che all' incontro si moltiplicano o si dividono per 10 per 100 per 1000, col portare la

virgola che indica le unità verse diritta o verso sinistra di una, due, tre cifre. Le regole delle quattro operazioni fondamentali sui numeri decimali si deducono esse pure facilmente da quelle relative agli interi e alle frazioni.

L'addizione e la sottrazione non differiscono da quello che sono queste operazioni istesse sui numeri interi.

La moltiplicazione si fa come sui numeri interi astrazione fatta dalla virgola; e si separano poi a destra del prodotto tante cifre decimali, quante sono insieme quelle di tutti due i fattori.

Nella divisione se il dividendo ha meno cifre decimali del divisore, s'aggiungono alla destra di lui tanti zeri che bastino a pareggiare il numero delle cifre decimali, quindi si sopprime la virgola e si opera come sugli interi. Se il dividendo ha più cifre decimali del divisore; si sopprime la virgola, e si separa in quoziente un numero di cifre decimali uguale alla differenza tra quelle del dividendo e quelle del divisore.

RIDUZIONE DELLE FRAZIONI ORDINARIE IN DECIMALI. Il modo di trasformare le frazioni ordinarie in decimali si vede nell'esempio sottoposto.

$$\begin{array}{r|l} 27 & 4 \\ 30 & \overline{6,75} \\ 20 & \end{array}$$

Si abbia $\frac{27}{4}$ facendo la divisione del numeratore 27 per il denominatore 4 si ha un quoziente 6; alla dritta del 6 si pone una virgola; quindi si aggiunge un zero al resto 3 e si divide il 30 per 4, il che da un quoziente 7 decimi e un reste 2; si aggiunge un altro zero e si divide il 20 per 4, il che da per quoziente 5. Onde $\frac{27}{4} = 6,75$.

Così aggiungendo sempre degli zeri a dritta dei resti consecutivi, si può ottenere il valore del quoziente di una divisione; o d'una espressione frazionaria sotto forma decimale approssimata quanto si vuole.

Nella conversione in decimali d'una frazione ordinaria ridotta alla sua più semplice espressione possono accadere tre casi.

Se il denominatore non contiene altri fattori che 2 e 5, si potrà sempre esprimere il valore esatto della frazione con un numero limitato di cifre decimali.

Esempi $\frac{3}{25} = \frac{3}{5 \times 5} = 0,12$

$$\frac{7}{40} = \frac{7}{2 \times 2 \times 2 \times 5} = 0,175.$$

Se il dominatore non contiene nè 2, nè 5, non si può esprimere il valore esatto della frazione con un numero di cifre limitato, e la frazione decimale diviene *periodica*.

Tale cioè che si compone di una serie di cifre che si riproducono periodicamente fino all'infinito: ed il *periodo* comincia immediatamente dopo la virgola. In queste caso dicesi *periodica semplice*.

Esempi $\frac{2}{3} = 0,6666$ il periodo è 6.

$\frac{35}{111} = 0,315\,315\,315$ il periodo è 315.

Finalmente quando il denominatore contiene oltre i fattori 2 e 5 altri fattori differenti da questi la frazione decimale è periodica: ma il periodo non comincia più immediatamente dopo la virgola, e l'espressione decimale dicesi *periodica mista*.

Esempi $\frac{4}{15} = 0,2666$ il periodo è 6.

$\frac{13}{18} = 0,72222$ il periodo è 2.

CONVERSIONE DELLE FRAZIONI DECIMALI IN FRAZIONI ORDINARIE. Questa non offre alcuna difficoltà nel caso in cui non vi è periodo. Così si ottiene immediatamente

$$3,864 = 3 + \frac{864}{1000} = 3 + \frac{108}{125}.$$

Nel caso di un periodo semplice come per esempio:

0,272727 si ha $0,272727 = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$; come pure si ha $0,816381638163 = \frac{8163}{9999} = \frac{907}{1111}$; e $3,2727 = 3 + \frac{3}{11}$.

Per ridurre in frazione ordinaria una frazione periodica mista come per esempio 0,1231717, si prende la differenza tra 12317 e 123, la quale è 12194, e si divide questa per 99000 onde

$$0,1231717 = \frac{12194}{99000} = \frac{6097}{49500}$$

Riportiamo qui una tavola tratta dal *pronto calcolatore* di *Suret*, che serve ad abbreviare spesso i calcoli per la conversione delle frazioni ordinarie in frazioni decimali e reciprocamente. Le colonne D contengono i denominatori, le colonne N i numeratori delle frazioni ordinarie; e le prime quattro cifre della frazione decimale equivalente sono nelle colonne intitolate DEC, e corrispondono in linea orizzontale al numeratore della frazione ordinaria da ridurre in decimale.

TAVOLA PER RIDURRE LE FRAZIONI ORDINARIE IN DECIMALI E RECIPROCAMENTE.

D.	N.	DEC	D.	N.	DEC.	D.	N.	DEC.	D.	N.	DEC.	D.	N.	DEC	D.	N.	DEC.	D.	N.	DEC	D.	N.	DEC
2	1	5000	10	9	9000	13	1	0007	16	3	1770	21	1	0476	25	10	4000	26	3	1154	30	21	7241
							2	1333		9	3333		2	0952		11	4765		5	1923		23	7631
3	1	3333	11	1	0909		3	1000		7	3333		3	1428		12	3217		7	3802		23	9031
	2	6667		2	1818		4	2007		9	5555		4	1905		13	5652		9	3461		17	9810
				3	2727		5	3333		9	6000		5	2381		14	6957		11	4231			
4	1	2500		4	3636		6	4000	16	3552			6	2857		15	6312		13	5000	30	1	0333
	3	5000		5	5455		7	4667		11	6111		7	3333		16	6957		15	6522		3	1000
	3	7502		6	5455		8	5333		13	8667		8	3810		17	7391		17	8636		3	1667
				7	6364		9	6000		13	7333		9	4286		18	7826		19	7500		7	2333
5	1	2000		8	7273		10	6667		14	7778		10	4762		19	8261		21	8077		9	3000
	2	4000		9	8182		11	7333		15	8333		11	5238		20	8696		23	8846		11	3667
	3	6000		10	9091		12	8000		16	8889		12	5714		21	9130		25	9615		13	4333
	4	8000					13	8667		17	9444		13	6190		22	9565					15	5000
			12	1	0833		14	9333					14	6667				27	1	9370		17	6667
6	1	1667		2	1667				18	1	0556		15	7143	26	1	0417		3	1111		19	6333
	5	5333		3	2500	10	1	0023		2	1053		16	7619		2	0833		5	1852		21	7000
	5	8333		4	3333		2	1200		3	1579		17	8095		3	1250		7	2593		23	7667
	6	0667		5	4167		3	1875		4	2105		18	8571		4	1667		9	3333		23	8333
	6	4333		6	5000		4	2352		5	2632		19	9048		5	2083		11	4074		27	0000
				7	5833		5	3125		6	3158		20	9524		6	2500		13	4815		30	0667
7	1	1429		8	6667		6	3750		7	3684					7	2917		15	5556			
	2	2857		9	7500		7	4375		8	4111	27	1	0370		8	3333		17	6296	31	1	0323
	3	4286		10	8333		8	5000		9	4737		2	0741		9	3750		19	7037		3	1935
	4	5714		11	9167		9	5625		10	5263		3	1111		10	4167		21	7778		10	3226
	5	7143					10	6250		11	5789		4	1481		11	4583		23	8519		13	4839
	6	8571	13	1	0769		11	6875		12	6316		5	1852		12	5000		25	9259		20	6452
				2	1538		12	7500		13	6842		6	2222		13	5417					23	7097
8	1	1250		3	2308		13	8125		14	7368		7	2593		14	5833	28	1	0357		30	9677
	3	2500		4	3077		14	8750		15	7895		8	2963		15	6250		3	1071			
	3	3750		5	3846		15	9375		16	8421		9	3333		16	6667		6	1786	32	1	0313
	4	5000		6	4615					17	8947		10	3704		17	7083		7	2500		3	1935
	5	6250		7	5385	17	1	0588		18	9474		11	4074		18	7500		9	3214		16	5125
	6	7500		8	6154		2	1176					12	4444		19	7917		11	3929		15	4839
	7	8750		9	6923		3	1765	19	1	0526		13	4815		20	8333		13	4643		10	3250
				10	7692		4	2353		2	1053		14	5185		21	8750		15	5357		23	7419
9	1	1111		11	8462		5	2941		3	1579		15	5556		22	9167		17	6071		30	9375
	2	2222		12	9231		6	3529		4	2105		16	5926		23	9583		19	6786			
	3	3333					7	4118		5	2632		17	6296					21	7500	33	1	0303
	4	4444	14	1	0714		8	4706		6	3158		18	6667	28	1	0400		23	8214		2	1515
	5	5556		2	1429	18	1	0556		7	3684		19	7037		2	0800		25	9286		13	3939
	6	6667		3	2143		2	1111		8	4211		20	7407		3	1200		27	0643		15	4545
	7	7778		4	2857		3	1667		9	4737		21	7778		4	1600					23	6061
	8	8889		5	3571		4	2222		10	5263		22	8148		5	2000					25	7576
				6	4286		5	2778		11	5789		23	8519		6	2400					30	9091
				7	5000		6	3333		12	6316		24	8889		7	2800						
				8	5714		7	3889		13	6842		25	9259		8	3200						
				9	6429		8	4444		14	7368					9	3600						
				10	7143		9	5000		15	7895					10	4000						
				11	7857	19	1	0526		16	8421					11	4400						
				12	8571		2	1111		17	8947					12	4800						
				13	9286		3	1667		18	9474					13	5200						
							4	2222		19	0000												

D.	N	DEC	D.	N.	DEC.	D.	N.	DEC.	D.	N.	DEC	D.	N.	DEC	D.	N.	DEC	D.	N.	DEC	D.	N.	DEC

Seguito della Tavola precedente.

D	N	DEC	D	N.	DEC	D.	N.	DEC	D	N	DEC.
24	1	0416	51	1	0196	68	18	2176	81	1	0123
	5	1458		5	1225		19	2206	82		0121
	10	2857		10	2450		20	2426	83		0120
	12	3255		15	3676		21	2647	84		0119
	20	3715		20	4870		22	2868	85		0118
	23	7158		25	6056		23	2989	86		0116
	30	8571		30	7317		24	3088	87		0115
				35	8537		25	3750	88		0113
25	1	0278		40	9750				89		0112
	5	1389				67	1	0149	90		0111
	10	2778	52	1	0192		5	1866	91		0110
	13	4167		5	1150		10	2132	92		0108
	25	5536		10	2501		15	3151	93		0107
	35	6944		15	3871		20	4265	94		0106
	30	8333		20	4761		23	3815	95		0105
	35	8750		25	5952		30	5643	96		0104
				30	7143		35	7447	97		0103
27	1	0270	53	1	0333		40	8511	98		0102
	5	1351		5	1321		45	9574	99		0101
	10	2703							70		0100
	15	4054	54	1	0185	68	1	0294	71		0141
	20	5405		5	1158		5	1912	72		0139
	25	6757		10	2500		10	2941	73		0137
	30	8108		15	3750		15	4412	74		0135
	32	8650		20	4651		20	5147	75		0133
				25	5814		23	5408	76		0131
28	1	0263		30	6977		30	6250	77		0130
	5	1316		35	8140		35	7353	78		0128
	10	2632		40	9302		40	8235	79		0127
	15	3947					45	8824	80		0125
	18	3263	55	1	0227				81		0123
	25	6578		5	1136	69	1	0201	82		0122
	30	7895		10	2272		5	1520	83		0120
	35	9211		15	3408		10	2941	84		0118
				20	4545		12	3382	85		0117
29	1	0256		25	5682		20	4852	86		0116
	5	1282		30	6818		23	5151	87		0115
	10	2564		35	7955		30	6176	88		0114
	15	3846		40	9091		35	7352	89		0112
	25	6410	56	1	0255		40	8152	90		0111
	30	7692		5	1111				91		0109
	35	8974		10	2222	70	1	0200	92		0108
				15	3333		5	1250	93		0107
30	1	0333		20	4444		10	2500	94		0105
	5	1388		25	5555		15	3750	95		0104
	10	2800		30	6667		20	4750	97		0102
	13	3750		35	7778		25	5000	98		0101
	20	5556		40	8889		30	6250	99		0100
	25	6250					32	7500	100		0100
	30	7500		1	0217		35	8750			
	32	8750	57	5	1087		40	9500			

D	N.	DEC	D	N.	DEC	D.	N.	DEC	D.	N	DEC

Si trova così nella tavola che $\frac{5}{6} = 0,8333$: che $\frac{4}{7} = 0,5714$ che $\frac{21}{24} = 0,8750$. Quando i denominatori sono compresi tra 25 e 31 la tavola non da che i numeratori di 2 in 2. Se i denominatori sono compresi tra 31 e 51 la tavola non da i numeratori che di 3 in 3 e finalmente quando i denominatori sono compresi tra 51 e 100 la tavola non contiene che le frazioni ordinarie che hanno per numeratore l'unità.

§ 5. *Numeri complessi.*

Si chiamano *numeri complessi* quelli composti di unità di differenti valori, come per esempio 4 tese 5 piedi 6 pollici 3 linee e 11 punti; 2 ore 11 minuti 13 secondi 25 terzi ec. L'addizione e la sottrazione dei numeri complessi si fanno come pei numeri interi, avuto solamente riguardo nel portare alla relazione di grandezza delle differenti specie di unità.

ADDIZIONE.

	5 tese	4 piedi	8 pollici	8 linee
	7	3	9	9
Somma	13	2	6	5

Si osserverà nell'esempio precedente per fare l'addizione che 8 linee e 9 linee fanno 17 linee ossia 5 linee e un pollice che si porta; il quale riunito a 8 pollici e nove pollici ci da 18 pollici, e 6 pollici e un piede che si porta: 4 piedi 3 piedi e uno che si porta fanno 8 piedi, ossia 2 piedi e una tesa; che unita a 5 e 7 tese da 13 tese.

SOTTRAZIONE.

	13 tese	2 piedi	6 pollici	5 linee
	7	3	9	9
Differenza	5	4	8	8

Noe potendosi sottrarre 9 linee da 5 linee, si prende un pollice che vale 12 linee che riunite alle 5 fanno 17 linee, da queste tolte 9 restano 8 linee; da 5 pollici anzi da 17, perchè prendo in presto un piede, levati 9 pollici restano 8 pollici; da un piede anzi da 7 piedi, prendendo in presto, una tesa togliendo 3 piedi restano 4 pollici; da 12 tese togliendo 7 tese restano 5 tese.

La moltiplicazione di un numero complesso per un numero incomplesso si fa nel modo seguente

12 l. 2 s. 3 d. $\frac{2}{11}$ d. *Moltiplicando*

12 *Moltiplicatore*

144

1 4

3

2 $\frac{2}{11}$

155 l. 7 s. 2 d. $\frac{2}{11}$ d.

12 volte 12 lire fanno 144 lire.

12 volte 2 soldi fanno 24 soldi, o 1 lira e 4 soldi.

12 volte 3 denari fanno 36 denari o 3 soldi.

12 volte $\frac{2}{11}$ di denaro fanno $\frac{24}{11}$ d. o 2 d. $\frac{2}{11}$ d.

Il metodo delle *parti aliquote* conduce allo stesso resultato. Lo esporremo sull'esempio seguente che si riferisce al caso più generale della moltiplicazione dei numeri complessi.

Una tesa di muramento costa 12 l. 2. s. 3. d. $\frac{2}{11}$ d. quanto costeranno 12 tese 5 piedi 8 pollici? Si comincia da calcolare il prezzo di 12 tese come nell' esempio precedente; quindi si decompongono 5 piedi in 3 piedi e 2 piedi; 3 piedi che è la metà di una tesa è parte aliquota della tesa; 2 piedi è parte aliquota perchè ne è la terza parte; queste daranno dei prodotti uno dei quali sarà la metà, l'altro la terza parte del moltiplicando.

Per la parte del prodotto che corrisponde a 8 pollici, si osserverà che 8 pollici e la terza parte di 2 piedi ossia di 24 pollici, quindi si otterrà prendendo il terzo del prodotto parziale 4 l. 0 s. 8 d. $\frac{2}{33}$ d. ottenuto moltiplicando per 2 piedi. Ecco i particolari dell' operazione.

Moltiplicando 12 l. 2 s. 3 d. $\frac{2}{11}$ d.

Moltiplicatore 12 t. 5 p. 8 pollici.

Prezzo di 12 tese	a 12 l. la t.	144 l.	
	a 2 s. la t.	1 l. 4 s.	
	a 3 d. la t.	0 3 s.	
	a $\frac{2}{11}$ d.	0 0	2 d. $\frac{2}{11}$ d.
Prezzo di 5 piedi	3 p. o $\frac{1}{2}$ t.	6 l. 1 s. 1 d.	$\frac{13}{21}$ d.
	2 p. o $\frac{1}{3}$ t.	4 0	9 d. $\frac{2}{33}$ d.
Prezzo di 8 pollici $\frac{1}{3}$ di 2 p.		1 6	11 $\frac{2}{99}$
	Totale	156 l. 15 s.	11 d. $\frac{169}{198}$ d.

La DIVISIONE dei numeri complessi esige che si abbia riguardo alla natura delle unità del quoziente, per ridurre i resti successivi dell'operazione in unità dell' ordine immediatamente inferiore.

Per esempio: 87 tese di lavoro hanno costato 4783 l. 3 s. 9 d. quanto la tesa? Il quoziente sarà una somma espressa in lire soldi e denari.

Ecco qui unito il prospetto delle operazioni.

4783 l. 3 s. 9 d. | 87

433 | 54 l. 19 s. 7 d.

85

85 l. = 1700 s.

3 s.

1703

833

50

50 s. = 600 d.

9 d.

609

Quando il dividendo e il divisore sono numeri complessi ambedue, si riduce il divisore alle unità della specie inferiore, si moltiplica il dividendo per il denominatore del divisore, e si eseguisce la divisione per il numeratore, nel modo praticato di sopra.

Esempio: 57 tese 5 piedi 5 pollici di un lavoro costano 854 l. 17 s. 11 d. quanto la tesa?

Il primo numero ridotto in pollici ci da 4169 pollici ossia $\frac{4169}{72}$ di tese. Si moltiplicherà 854 l. 17 s. 11 d. per 72 ed avremo 61552 l. 10 s. da dividere per 4169. Il quoziente sarà 14 l. 15 s. 3 d. $\frac{1713}{4159}$ d.

Tutti i casi di divisione dei numeri complessi si riconducono alla divisione delle frazioni convertendo i numeri complessi che si debbono trattare in numeri frazionarii che rappresentino le unità della specie inferiore. Si vede dall'esempio precedente che questa maniera di operare che è la più generale non è però la più semplice.

§ 6. *Prove delle operazioni aritmetiche.*

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE. La prova generalmente adoprata nell'addizione, consiste nel rifare dal basso in alto le somme parziali delle colonne verticali, se col fare l'operazione si è operato dall'alto in basso, o viceversa. Questa prova però non è di garanzia sufficente, perchè in un senso e nell'altro si può commettere lo stesso errore.

La prova della sottrazione si fa con l'addizione, poichè aggiungendo al resto il numero sottratto, deve riformarsi il numero dal quale si è sottratto.

Il *Dizionario delle matematiche* di Montferrier contiene la traduzione inedita di un curioso frammento del celebre medico e matematico arabo *Avicenne* (*aboualy Ebn-syna*) il quale da per la sottrazione e per l'addizione una prova fondate sulle proprietà del numero 9. Questa consiste per la prima, nel fare la somma delle cifre, di ciascuno dei numeri da sommare, quindi la somma delle cifre di questa somma, e così seguitando sin che si giunga ad un numero minore di nove per ciascuno dei numeri da sommare. Quindi si debbono riunire questi numeri sommandoli, e ripetere l'operazione sulle cifre della somma sin che si giunga ad un risultato minore di nove, questo risultato dovrà essere uguale a quello che si ottiene facendo la stessa operazione sulla somma di tutti i numeri proposti, e ripetendola sinchè si giunga ad un risultato minore di nove.

Per la sottrazione le operazioni stesse si fanno sul numero minore e sul resto, e si deve ottenere lo stesso risultato che operando sulle cifre del numero più grande.

Un illustre geometra Cauchy, non sdegnando di occuparsi dei più elementari principii della matematica ci ha dati per le prove dell'addizione e della sottrazione dei processi nuovi semplici ed eleganti. Questi abbiamo dimostrati negli esempi seguenti.

	ADDIZIONE	PROVA.	
Numeri dati.	320,4268	25	*Numeri ausiliari.*
	16,202	11	
	403,	7	
	20,0401	7	
Somma	759,6689	50	*Somma*

Accanto a ciascun numero dato, o trovato facendo la somma o la differenza; si scrive la somma delle cifre che lo compongono considerate come unità semplici; così si ha che la somma delle cifre di 320,4268 è 25 quella di 16,202 è 11 ec. e che la somma delle cifre del 759,6689 è 50, appunto come la somma dei numeri 25 più 11 più 7 più 7 che si trovano a destra di quelli dei quali si cercava la somma.

	SOTTRAZIONE	PROVA.	
Numeri dati.	196,589	38	*Numeri ausiliari.*
	42,37	16	
Differenza.	154,219	22	*Differenza.*

Nel modo stesso la somma delle cifre di 154,219 è 22, appunto uguale alla differenza dei numeri 38 e 16 dedotti dai numeri dei quali si è fatta la differenza nel modo sopraindicato.

Per estendere la prova al caso, in cui si porta da una colonna all' altra; bisogna tener conto delle quantità riportate nel modo seguente.

ADDIZIONE PROVA.

Numeri dati.	198,57	30
	203,48	17
	347,34	18
	172.19	20
Cifre riportate.	121.2	6
Somma.	891,58	91

Le somme delle cifre contenute nel numero 891,58 è 31, a queste aggiungendo 6 diecine, tanto cioè quante sono le cifre riportate si ha 91 numero che rappresenta la somma totale delle cifre dei numeri dati e di quelli portati.

MOLTIPLICAZIONE E DIVISIONE. La prova della moltiplicazione si può fare con la divisione, perchè dividendo il prodotto per uno dei fattori devo ritrovarsi l'altro fattore, reciprocamente la prova della divisione può farsi con la moltiplicazione. Moltiplicando il divisore per il quoziento si deve ritrovare il numero che si ottiene togliendo dal dividendo l' ultimo resto.

Ma queste due prove quantunque ci pongano al sicuro da ogni tema di orroro si adoprano raramente perchè esigono troppo lunghi calcoli. Si adoprano più spesso le prove per nove e per undici. Esempio: si è avuto 4 995 042 da moltiplicare 5748 per 869. Si cerca se questo prodotto sia esatto.

Si fa la somma delle cifre di questo prodotto, dalla quale si toglie 9 quanto volte è possibile o si ha un avanzo 3 che si pone nella parte superiore di una croce di Sant' Andrea, disposta come si vede qui sotto.

Si fa la stessa operazione sopra il moltiplicando, si ottiene 6 che si pone alla sinistra della croce di S. Andrea; si ripete sul moltiplicatore e si ottiene cinque che si pone a destra. Il prodotto di 6 per 5 è 30 dal quale togliendo 9 quante volte è possibile si ha un resto 3 come dal prodotto. Questa riprova può farci argomentare della esattezza della operazione primitiva.

Per fare la prova per undici della stessa operazione si fa la differenza tra le cifre di posto pari e quella di posto dispari sul prodotto, si toglie undici da questa differenza quante volte è possibile; nel caso nostro si ha un resto zero che si pone in alto della croce di S. Andrea.

Si ripete la stessa operazione sui fattori la quale ci da 6 per l'uno, zero per l'altro; si fa il prodotto di 6 per 0 che è zero; e da questo si deduce la prova che l'operazione è senza errore.

Il dotto matematico dal quale abbiamo riportato il metodo per fare la prova dell' addizione o della sottrazione, ha dato pure un processo distinto per la moltiplicazione per mezzo del quale diviene facilissimo il fare la prova.

Supponiamo debbasi moltiplicare 6,46 per 12,3. Primieramente si formeranno le somme parziali dei prodotti dello stesso ordine facendo camminare sopra al moltiplicando il moltiplicatore rovesciato, e scrivendo ogni volta l' ultima cifra della somma parziale ottenuta sotto la cifra 2 che rappresenta le unità semplici del moltiplicatore.

Moltiplicatore rovesciato.	3,21	3,21	3,21	3,21
Moltiplicando.	6,46	6,46	6,46	6,46
	18	24	32	16

3,21
6,46
6

Il primo prodotto parziale si è ottenuto moltiplicando 3 per 6, che si trova sotto a 3 e rappresenta 18 millesimi; il secondo si ha aggiungendo il prodotto di 2 per 6 che si trova ora sotto al 2 al prodotto di 3 per 4 che si trova sotto al 3 e rappresenta 24 centesimi; il terzo si compone di 1 × 6 2 × 4 × 3 × 6 e rappresenta 32 decimi; il quarto è 1 × 4 + 6 × 2 e rappresenta 16 unità; il quinto 1 × 6 rappresenta 6 diecine; il prodotto totale si ha sommando i prodotti parziali, il che può farsi nel modo seguente, ponendo nella linea superiore le diecine dei prodotti ottenuti, cioè 1321, nella inferiore le unità 66248.

MOLTIPLICAZIONE E PROVE

Moltiplicatore rovesciato .	3,24	6
Moltiplicando. . .	6,46	16
	43 21	7
	66 248	26
Prodotto . . .	79,458	96

La preva si fa prendendo la somma delle cifre del moltiplicatore 6 e quella delle cifre del moltiplicando 16; il prodotto di $6 \times 16 = 96$ deve essere lo stesso numero che risulterebbe, prendendo a parte le diecine de' prodotti parziali, e le unità, e quindi facendo la somma; nel caso nostro la somma delle diecine $4+3+2+4=7$, le unità $6+6+2+4+8=26$ ora la somma di 7 diecine con 26 unità da appunto 96, quindi si considereranno esatte le somme parziali 4321, 66248; la somma totale 79458 può essere verificata, osservando che la somma delle sue cifre $7+9+4+5+8=33$ è appunto uguale a $7+26$ considerate queste cifre come esprimenti unità semplici.

Per fare l'operazione secondo questo sistema sarà utile scrivere il moltiplicatore rovesciato sopra una striscia di carta, che si farà scorrere al disopra del moltiplicando, in modo da condurre successivamente l'ultima cifra di ciascuno in corrispondenza a ciascuna cifra dell'altro come si è visto di sopra.

§ 7. *Inalzamento a potenza, ad estrazione della radice corrispondente.*

DEFINIZIONI E NOTAZIONI. Si chiama *potenza* di un numero il prodotto di più fattori eguali a questo numero; così 3, 9, 27, 81, 243, sono la prima, la seconda, la terza, la quarta, la quinta potenza di 3: oppure potenza di primo, di secondo di terzo grado ec.; le stesse potenze rispetto al numero 2 sono 2, 4, 8, 16, 32.

Si chiama radice il numero che moltiplicato per se stesso più volte riproduce un numero dato; così 3 è la radice seconda di 9, è la radice terza di 27, la radice quarta di 81, la radice quinta di 243: ovvero la radice del secondo grado di 9, del terzo grado di 27 ec.

La seconda potenza si chiama anco quadrato, e la terza cubo: come chiamasi radice quadrata la radice seconda, radice cubica la radice terza di una quantità.

L'inalzamento a potenza non presenta nessuna difficoltà, se non quella che può derivare dalla lunghezza delle operazioni. Si opererà secondo i principii stabiliti rispetto alla moltiplicazione dei numeri interi, frazionari e decimali.

La tavola seguente contiene le prime sei potenze dei primi dieci numeri; tutte le potenze di uno sono uguali ad uno.

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª
2	4	8	16	32	64
3	9	27	81	243	729
4	16	64	256	1024	4096
5	25	125	625	3125	15625
6	36	216	1296	7776	46656
7	49	343	2401	16807	117649
8	64	512	4096	32768	262144
9	81	729	6561	59049	531441
10	100	1000	10000	100000	1000000

Le potenze di una quantità si indicano ponendo a dritta di questa quantità un poco in alto una piccola cifra che indichi il grado della potenza, essia il numero dei fattori uguali che entrano nel prodotto il quale da la potenza.

Così le espressioni

$$307^2, \left(\frac{21}{34}\right)^3, \left(1+\frac{2}{3}\right)^6$$

indicano respettivamente il quadrato di 307, il cubo di $\frac{21}{34}$, la sesta potenza di $1+\frac{2}{3}$. Era necessario il chiudere dentro parentesi $\left(1+\frac{2}{3}\right)$ e $\left(\frac{21}{34}\right)$ per indicarne la potenza.

Le radici si indicano col segno *radicale* $\sqrt{\ }$, all'apertura del quale si pone il grado e *indice* della radice da estrarsi; quando si tratta della radice quadrata si può sopprimere l'indice 2. Le espressioni

$\sqrt{17}$, $\sqrt[3]{\frac{101}{103}}$ $\sqrt[8]{\left(24+\frac{17}{11}\right)}$,

rappresentano respettivamente la radice quadrata di 17, la radice cubica di $\frac{101}{103}$, e la radice ottava di $24+\frac{7}{11}$ o di $\frac{271}{11}$.

ESTRAZIONE DELLA RADICE QUADRATA. Per estrarre la radice quadrata da un numero intero 21 372 129 si divide in classi di due cifre partendo da destra verso sinistra; l'ultima classe a sinistra può contenere anco una sola cifra. Per ottenere la prima cifra della radice contenuta si osserverà che il più gran quadrato in 21 ultima classe a sinistra è 16, e che la radice di 16 è 4; tolto 16 da 21 si ha un resto 5, e si abbassa accanto a questo la classe succedente 37, il che da 537; si separa da questo la cifra 7 e si divide 53 per 8 che è il doppio della prima cifra 4 trovata in radice. Il quoziente 6 da la seconda cifra della radice. Questa cifra potrebbe essere troppo grande; per assicurarsi si pone al di sotto della radice come nell'esempio il 6 accosto all'8, e

Quadrato dato.

21 37 21 29	4623* *radice cercata.*
53 7	
212 1	$86 \times 6 = 516$
2772 9	$922 \times 2 = 1844$
00	$9243 \times 3 = 27729$

si ha 86 che si moltiplica per 6; il prodotto 516 potendo essere sottratto da 537, la cifra trovata è la seconda della radice, e si ha un resto 21; si ripete l'operazione abbassando la classe 21 accanto al resto 21, il che da 2121, e separando una cifra avremo 212, che divideremo per 92 doppio di 46 parte trovata della radice. Il quoziente 2 sarà la terza cifra cercata dalle radice. E perchè potrebbe questa cifra essere troppo grande ci assicureremo ponendo 2 cifra trovata accanto a 92, il che da 922, moltiplicando per 2 ed osservando che il prodotto 1844 è minore di 2121, e ci da la differenza 277, accanto alla quale si abbassa la classe 29 e si ha 27729; separeremo la cifra 9 e divideremo il 2772 per il doppio della parte trovata della radice, che è 924 doppio di 462; si avrà un quoziente 3, che posto a destra di 942 ci da 9243, il quale moltiplicato per 3 da 27729; facendo la sottrazione come sopra si avrà un resto zero, dal che si conclude che 4623 è esattamente la radice quadrata di 21 372 129; e si verifica a posteriori inalzando alla seconda potenza il numero 4623.

L'andamento delle operazioni si vede nella tavola superiore.

Nel caso in cui uno dei prodotti parziali 86×6, 922×2, 9243×3 fosse stato maggiore del numero dal quale doveva essere sottratto, sarebbe stato necessario diminuire di una unità la cifra 6, 2, o 3 che corrispondeva a questo prodotto; fino a che la sottrazione divenisse possibile.

Se invece del numero 21 372 129, si fosse dovuta estrar la radice di 21 372 243 si avrebbe avuto un resto 114, ed il numero 4623 avrebbe espresso una radice approssimata del numero dato che non è quadrato perfetto, e differente dalla vera meno di una unità.

Volendo estrarre la radice quadra da una frazione ordinaria, si incomincia da rendere il suo denominatore un quadrato perfetto, se già nol fosse; il che si ottiene moltiplicando i due termini della frazione, per il prodotto dei fattori necessari per rendere il denominatore un quadrato perfetto. Si estrae quindi la radice prossima del nuovo numeratore, e si divide questa per la radice trovata del denominatore. Così

$\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$ (risultato esatto)

$\sqrt{\frac{11}{25}}=\frac{\sqrt{11}}{5}>\frac{3}{5}$ radice approssimata a meno di $\frac{1}{5}$ di differenza.

$\sqrt{\frac{7}{12}}=\sqrt{\frac{7}{3.4}}=\sqrt{\frac{7\times3}{3^2\times2^2}}=$

$\frac{\sqrt{21}}{6}>\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ approssimata a meno di $\frac{1}{6}$ di differenza.

$\sqrt{\frac{8}{11}}=\sqrt{\frac{8\times11}{11^2}}=\frac{\sqrt{88}}{11}>$

$\frac{9}{11}$ approssimata a meno di $\frac{1}{11}$ di differenza.

Per estrarre la radice quadrata da un numero decimale, si aggiungeranno alla destra di questo numero tanti zeri, da fare un numero di cifre decimali pari al doppio delle cifre decimali che si vogliono in radice. Si estrarrà poi la radice facendo astrazione dalle virgole, si separeranno sulla diritta di questa radice tante cifre decimali che corrispondano alla metà delle cifre decimali del quadrato dato.

Così si troverà che 5,87 e la radice quadra di 34,5 o di 34,5000, salvo un erroro minore di $\frac{1}{100}$.

Se un numero intero o frazionario irreduttibile non è un quadrato perfetto, è impossibile ottenere la sua radice esattamente; ma se si converte in una frazione di una specie determinata, e specialmente in decimali, si può ottenere il valore delle radici approssimate quanto si vuole.

Se si voglia per esempio $\sqrt{7}$ approssimata a meno di $\frac{1}{5}$ di differenza si porrà

$$\sqrt{7} = \sqrt{\frac{7 \times 5^2}{5^2}} = \frac{\sqrt{175}}{5} > \frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5}.$$

La radice di 2 a meno di $\frac{1}{1000}$ di differenza si ottiene estraendo la radice da 2000000 e separando tre cifre decimali a destra di questa radice il che ci da

$$\sqrt{2} = 1,414.$$

Le radici dei numeri interi, e delle frazioni irriduttibili che non sono quadrati perfetti, non potendo essere esattamente espresse da un numero limitato di cifre, si chiamano *incommensurabili* o *irrazionali* di secondo grado.

ESTRAZIONE DELLA RADICE CUBICA. Per estrarre la radice cubica da un numero intero 401 947 272 si divide in classi di tre cifre da drittta verso sinistra; e l'ultima di queste classi potrà non avere che una sola o due cifre. Il più gran cubo contenuto nell'ultima classe a sinistra 401 essendo 343, la cui radice terza è 7, questo rappresenta la prima cifra della radice.

401 947 272	738
589 47	2
129 302 72	14700 = 70 × 3 (1° div.)
00	639 = (70 × 3 + 3) × 3
	15339 × 3 = 46017
	2
	15 98700 = 730 × 3 (2° div.)
	17584 = (730 × 3 + 8) 8
	1616284 × 8 = 12930272

Fatta la differenza tra 343 e 401 che è 58 si scrive accanto ad essa la classe successiva 947, il che da 58947; separando da questo numero le ultime due cifre a destra si guarda quante volte 589 contiene il triplo quadrato di 7 cioè 147; il quoziente 3 sarà la seconda cifra della radice, o una cifra troppo grande. Per assicurarsene si prende il triplo quadrato di 70 che e 14700, si aggiunge ad esso il triplo di 70 più 3 moltiplicato per 3, ossia 213 × 3 che è 639; il che ci da la somma 15399; si fa il prodotto di questa per 3 e si ottiene 46017: poichè questo numero è minora di 58947 la cifra trovata 3 sta bene. Fatta la differenza si ha un avanzo 12930 sul quale si ricomincia la stessa operazione, abbassando accanto ad esso la classe 272, prendendo dal 12930272 il 129302 e dividendolo per il triplo del quadrato di 73 ossia per 15987. Il quoziente 8 è la terza cifra della radice o una cifra troppo grande. Per assicurarsene si aggiunge al triplo del quadrato di 730 che e 1598700 il triplo di 730 più 8 moltiplicati per 8, che è 17584, e si ha una somma 1616284 la quale moltiplicata per 8 da il prodotto 12930272, che è uguale al secondo resto: così il resto finale è zero, e 738 rappresenta la radice terza del 401947272 che è un cubo esatto; il che si verificherebbe a posteriori facendo la terza potenza di 738.

Se una delle sottrazioni parziali fosse stata impossibile sarebbe occorso di diminuire di una unità le cifre messe in radice 3 o 8, fintantochè i prodotti parziali fatti rispetto alla nuova cifra fossero minori dei resti successivi.

Se invece del numero 401947272, fosse stato dato il numero 401959397, il terzo resto sarebbe stato 12125, e 738 avrebbe espresso una radice cubica approssimata, differente dalla vera meno

che di una unità. Il numero date non sarebbe state un cubo perfette.

La radice cubica di une frazione si ottiene estraendo separatamente la radice cubica da ciascuno dei suoi termini. Se il denominatore della frazione non è un cubo perfetto si rende tale moltiplicando ambedue i termini della frazione per dei fattori che lo rendano un cubo perfetto.

Così

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5}$$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{20}} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 2 \times 5^3}{2^3 \times 5 \times 2 \times 5^3}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{150}}{10} > \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \text{ ec. con approssimazione fino ad } \frac{1}{10}.$$

$$\sqrt[3]{\frac{4}{7}} = \sqrt[3]{\frac{4 \times 7^2}{7^3}} = \frac{\sqrt[3]{196}}{7} = \frac{5}{7}$$

con approssimazione fino ad $\frac{1}{7}$.

Le radici cubiche dei numeri interi e delle frazioni irriduttibili che non sono cubi perfetti non possono essere espresse da un numero limitato di cifre, e prendono il nome di irrazionali di terzo grado.

Si può approssimarsi quanto si vuole al vero valore di una radice incommensurabile. Se questa radice deve esser posta sotto forma di frazione ordinaria della quale sia dato il denominatore, basta moltiplicare il numero del quale si cerca la radice per il cubo di questo denominatore, ed estrarre la radice cubica più prossima di questo prodotto, quindi dividerla per il denominatore date.

Ne segue che per calcolare in decimali una radice cubica con approssimazione data, bisogna aggiungere al numero dato tanti zeri quanti sono necessari perchè il numero delle cifre decimali di esso, sia triplo di quello delle cifre decimali che si vogliono nella radice cercata.

Esempi per avere $\sqrt[3]{5}$ approssimate fino ad $\frac{1}{1000}$ si estrae la radice cubica da 5000000000 e si ha 1709; si separano a destra di queste numero tre cifre decimali il che ci da 1,709, che rappresenta la radice approssimata fino ad $\frac{1}{1000}$. Il numero 1,710 che ha per cubo 5,000211000 rappresenta la $\sqrt[3]{5}$ con approssimazione maggiore che 1,709, il quale ha per cubo 4,991443829, che differisce da 5 più che non ne differisce 5,000211000, tuttavia si vede che la radice cercata è compresa tra 1,709 e 1,710. Terminiamo ciò che riguarda le potenze dando una tavola nella pagina seguente che contiene: 1° il quadrato, 2° il cubo, 3° la radice quadrata, 4° la radice cubica, dai numeri interi da 1 a 100; le radici sono approssimate fino alla terza cifra decimale.

Non entriamo qui in particolari sull'estrazione delle radici di un grado superiore al terze; contentandoci di dire che si possono ricondurre a più estrazioni di radici quadrate successive l'estrazione delle radici quarta, ottava, sedicesima; e a delle estrazioni successive di radici cubiche le estrazioni delle radici nona, ventisettesima ec. infine a delle estrazioni di radice quadrate e cubiche, quelle delle radici di grado 5°, 12°, 24°, 48°, e 5°, 18°, 52°, 162° ec. In una parole con delle estrazioni di radici quadrate e cubiche, si potrà trovare ogni radice l'indice della quale non abbia per fattori primi che 2 e 3.

Così per ottenere $\sqrt[6]{782757789696}$ si estrae primieramente da questo numero la radice quadra la quale è 884736, quindi da questo numero si estrae la radice cubica, che ci da

$$96 = \sqrt[6]{782757789696}.$$

§ 8. *Rapporti, proporzioni, e progressioni.*

Rapporti per differenza e per quoziente. Si paragonano le quantità in due maniere, o cercando di quanto una sorpassa l'altra, il che dà il *rapporto o la ragione aritmetica* e per *differenza*: o cercando quante volte l'un contiene l'altra, il che dà il *rapporto* o la *ragione geometrica* o per *quoziente*.

NUMERI	QUADRATI	CUBI	RADICE QUADRATA	RADICE CUBICA	NUMERI	QUADRATI	CUBI	RADICE QUADRATA	RADICE CUBICA
1	1	1	1,000	1,000	51	26 01	132 651	7,141	3,708
2	4	8	1,414	1,260	52	27 04	140 608	7,211	3,732
3	9	27	1,732	1,442	53	28 09	148 877	7,280	3,756
4	16	64	2,000	1,587	54	29 16	157 464	7,348	3,780
5	25	125	2,230	1,710	55	30 25	166 375	7,416	3,802
6	36	216	2,449	1,817	56	31 36	175 616	7,483	3,826
7	49	343	2,649	1,913	57	32 49	185 193	7,550	3,848
8	64	512	2,828	2,000	58	33 64	195 112	7,615	3,871
9	81	729	3,000	2,080	59	34 81	205 379	7,681	3,893
10	1 00	1 000	3,162	2,154	60	36 00	216 000	7,746	3,915
11	1 21	1 331	3,317	2,224	61	37 21	226 981	7,813	3,936
12	1 44	1 728	3,464	2,289	62	38 44	238 328	7,874	3,958
13	1 69	2 197	3,606	2,351	63	39 69	250 047	7,937	3,979
14	1 96	2 744	3,741	2,410	64	40 96	262 144	8,000	4,000
15	2 25	3 375	3,873	2,466	65	42 25	274 625	8,062	4,021
16	2 56	4 096	4,000	2,520	66	43 56	287 496	8,124	4,041
17	2 89	4 913	4,123	2,571	67	44 89	300 763	8,185	4,062
18	3 24	5 832	4,242	2,621	68	46 24	314 432	8,246	4,082
19	3 61	6 859	4,359	2,668	69	47 61	328 509	8,307	4,102
20	4 00	8 000	4,472	2,714	70	49 00	343 000	8,367	4,121
21	4 41	9 261	4,583	2,758	71	50 41	357 911	8,426	4,141
22	4 84	10 648	4,690	2,801	72	51 84	373 248	8,485	4,160
23	5 29	12 167	4,796	2,843	73	53 29	389 017	8,544	4,179
24	5 76	13 824	4,899	2,884	74	54 76	405 224	8,602	4,198
25	6 25	15 625	5,000	2,924	75	56 25	421 875	8,660	4,217
26	6 76	17 576	5,099	2,962	76	57 76	438 976	8,718	4,235
27	7 29	19 683	5,196	3,000	77	59 29	456 533	8,775	4,254
28	7 84	21 952	5,291	3,037	78	60 84	474 552	8,832	4,272
29	8 41	24 389	5,385	3,072	79	62 41	493 039	8,888	4,291
30	9 00	27 000	5,477	3,107	80	64 00	512 000	8,944	4,308
31	9 61	29 791	5,566	3,141	81	65 61	531 441	9 000	4,327
32	10 24	32 768	5,657	3,175	82	67 24	551 368	9,055	4,344
33	10 89	35 937	5,744	3,208	83	68 89	571 787	9,110	4,362
34	11 56	39 304	5,831	3,240	84	70 56	592 704	9,165	4,380
35	12 25	42 875	5,916	3,271	85	72 25	614 125	9,220	4,397
36	12 96	46 656	6,000	3,301	86	73 96	636 056	9,274	4,414
37	13 69	50 653	6,083	3,332	87	75 69	658 503	9,327	4,431
38	14 44	54 872	6,164	3,361	88	77 44	681 472	9,381	4,448
39	15 21	59 319	6,245	3,391	89	79 21	704 969	9,434	4,465
40	16 00	64 000	6,323	3,420	90	81 00	729 000	9,487	4,481
41	16 81	68 921	6,403	3,448	91	82 81	753 571	9,539	4,498
42	17 64	74 088	6,481	3,476	92	84 64	778 688	9,592	4,514
43	18 49	79 507	6,557	3,503	93	86 49	804 357	9,644	4,531
44	19 36	85 184	6,633	3,530	94	88 36	830 584	9,695	4,547
45	20 25	91 125	6,708	3,557	95	90 25	857 375	9,747	4,563
46	21 16	97 336	6,782	3,583	96	92 16	884 736	9,798	4,579
47	22 09	103 823	6,856	3,608	97	94 09	912 673	9,849	4,595
48	23 04	110 592	6,928	3,634	98	96 04	941 192	9,899	4,610
49	24 01	117 649	7,000	3,659	99	98 01	970 299	9,950	4,626
50	25 00	125 000	7,071	3,684	100	10000	1000000	10,000	4,641

Esiste una grandissima analogia tra i resultati che si ottengono considerando queste due specie di rapporti: quelle proprietà che corrispondono in un caso a addizioni o sottrazioni, corrispondono nell'altro a moltiplicazioni o divisioni; su nell'uno si tratta di moltiplicazioni o divisioni, si tratterà nell'altro di innalzamento a potenza o estrazioni di radice.

Noi porremo ciascuna delle proprietà relative ai rapporti per differenza in corrispondenza con le analoghe dei rapporti

per quoziente; onde si mostrino in maggiore evidenza quei resultati sui quali è fondata la ammirabile scoperta dei logaritmi.

In ogni rapporto la prima delle quantità che si considera ha il nome di *antecedente*, la seconda quello di *conseguente*; tutte due sono i termini del rapporto.

Quando due rapporti sono uguali le quantità che compongono questi rapporti formano una proporzione.

Proprietà comparate delle equidifferenze e degli equiquozienti.

La proporzione chiamasi per *differenza* o *aritmetica* quando si tratta di rapporti per differenza.

A questi si da anco il nome di *equidifferenza*.

I quattro termini di una equidifferenza si scrivono l' uno dopo l' altro separando l' antecedente dal conseguente con un punto (.) e i due rapporti con due punti (:)

Si scrive dunque

$$7 . 2 : 11 . 6$$

equidifferenza che equivale a

$$7 - 2 = 11 - 6.$$

La proporzione chiamasi *per quoziente* o *geometrica* quando si tratta di un rapporto per quoziente.

Si chiama ancora *equiquoziente*.

I quattro termini di una proporzione per quoziente si scrivono gli uni dopo gli altri separando l' antecedente dal conseguente con due punti (:) e i due rapporti con quattro punti (::)

Per cui si scriverà

$$21 : 3 :: 14 : 2$$

equiquoziente che equivale a

$$\frac{21}{3} = \frac{14}{2}.$$

Il primo o l' ultimo termine di una proporzione si chiamano *estremi*, il secondo ed il terzo *medii*.

In ogni equidifferenza

$$7 . 2 : 11 . 6,$$

la somma $7 + 6$ degli estremi 7 e 6 è uguale alla somma $2 + 11$ dei medii 2 e 11.

Quindi si ottiene facilmente uno qualunque dei quattro termini di una equidifferenza, quando si conoscono gli altri tre. Basta perciò far la *somma* dei medii, e *sottrarre* l' altro estremo conosciuto, se il termine che si cerca è un estremo: o fare la *somma* degli estremi, e *sottrarne* il medio conosciuto, quando il termine che si cerca è un medio.

Reciprocamente se quattro quantità sono tali che la somma di due di esse sia uguale alla somma delle altre due, di queste potrà formarsi una equidifferenza, nella quale due delle quantità dette facciano l' ufficio di estremi, le altre due che danno ugual somma facciano l' ofiicio di medii.

Perciò si possono far subire ad ogni proporzione per differenza tutti i cambiamenti che non alterano l' uguaglianza tra la *somma* dei medii e degli estremi.

In ogni equiquoziente *il prodotto* 21×2 degli estremi 21 e 2, è uguale al *prodotto* 3×14 dei medii 3 e 14. Perciò si può determinare facilmente uno dei termini di una proporzione per quoziente quando sono conosciuti gli altri tre. Basta perciò fare il *prodotto* dei due medii e *dividere* per l' estremo cognito se si cerca l' altro estremo: o fare il *prodotto* dei due estremi e *dividere* per il medio cognito se si cerca l' altro medio.

Reciprocamente quando due quantità sono tali che il prodotto di due di queste sia uguale al prodotto delle altre due, si può con queste formare un equiquoziente, nel quale due delle quantità dette facciano ufficio di medii, le altre due che danno ugual prodotto, facciano ufficio di estremi.

Quindi si possono far subire ad una proporzione per quoziente tutte quelle trasposizioni di termini le quali non alterano l' uguaglianza di *prodotto* tra i medi e gli estremi.

L' equidifferenza

$$7 . 2 : 11 . 6$$

darà luogo ad altre sette equidifferenze che sono:

$$\begin{array}{l} 7 . 11 : 2 . 6 \\ 6 . 11 : 2 . 7 \\ 6 . 2 : 11 . 7 \\ 2 . 6 : 7 . 11 \\ 2 . 7 : 6 . 1 \\ 11 . 7 : 6 . 2 \\ 11 . 6 : 7 . 11 \end{array}$$

In questo modo dall' equiquoziento

$$21 : 3 :: 14 : 2$$

se ne trarranno altre sette

$$\begin{array}{l} 21 : 14 :: 3 : 2 \\ 2 : 14 :: 3 : 21 \\ 2 : 3 :: 14 : 21 \\ 3 : 2 :: 21 : 14 \\ 3 : 21 :: 2 : 14 \\ 14 : 21 :: 2 : 3 \\ 14 : 2 :: 21 : 3 \end{array}$$

Quando in una proporzione per differenza o per quoziente i due medii sono eguali la proporzione si dice continua.

Il valore del termine medio dicesi il *medio aritmetico* tra i due estremi dati se si tratta di equidifferenza.

Il medio arimetico tra due quantità è però la loro *somma* divisa per 2.

Così nella equidifferenza continua

$$9 . 17 . 17 . 25$$

si ha $17 = \frac{9 + 25}{2} = \frac{34}{2}$.

Questa equidifferenza continua si scrive ordinariamente così

$$\div 9 . 17 . 25$$

Se si abbiano più equidifferenze come

$$\begin{array}{l} 7 . 2 : 11 . 6 \\ 3 . 5 : 10 . 12 \\ 9 . 15 : 8 . 14 \end{array}$$

Si ottiene un altra equidifferenza sommandole tutte termine per termine il che ci da nel caso presente.

$$\begin{array}{c} 7+3+9 . 2+5+15 : \\ 11+10+8 . 6+12+14 \end{array}$$

ossia

$$19 . 22 : 29 . 32$$

Se si moltiplicano tutti i termini di una equidifferenza per uno stesso numero, i prodotti formano una nuova equidifferenza così da

$$7 . 2 : 11 . 6$$

si ottiene $7 \times 8 . 2 \times 8 : 11 \times 8 . 6 \times 8$

ossia $56 . 16 : 88 . 48$.

Da un equiquoziente il valore del termine medio dicesi *medio geometrico* tra i due termini estremi.

Il medio geometrico tra due quantità è qui la radice quadrata del prodotto di queste due quantità.

Per esempio nella proporzione geometrica continua

$$5 : 30 :: 30 : 180$$

si ha $30 = \sqrt{5 \times 180} = \sqrt{900}$.

Questo equiquoziente continuo si scrive ordinariamente così

$$\div\div 5 : 30 : 180$$

Se si hanno più equiquozienti come

$$\begin{array}{l} 21 : 3 = 14 : 2 \\ 11 : 22 = 4 : 8 \\ 5 : 25 = 2 : 10 \end{array}$$

Si otterrà un altro equiquoziente moltiplicando tutti i precedenti termine per termine, e questo sarà

$$21 . 11 . 5 : 3 . 22 . 25 :: 14 . 4 . 2 : 2 . 8 . 10$$

ossia

$$1155 : 1650 :: 112 : 160$$

Inalzando tutti i termini di un equiquoziente ad una stessa *potenza*, i quattro termini che risultano formano un altro equiquoziente. Così da

$$21 : 3 :: 14 : 2$$

si ha $21^3 : 3^3 :: 14^3 : 2^3$

ovvero $9261 : 27 :: 2744 : 8$

Proprietà esclusive degli equiquozienti.

Da una proporzione per quoziente

$$21 : 3 = 14 : 2$$

si deduce l' altra

$$21 \pm n \times 3 : 3 = 14 \pm n \times 2 : 2$$

Sottraendo dall' antecedente, o sommando con esso ciascun conseguente ripetuto un certo numero di volte o viceversa.

Questa operazione può ripetersi su tutte le proporzioni che si deducono dalla $21 : 3 = 14 : 2$ per mezzo di semplici cangiamenti nell' ordine dei termini.

Le modificazioni che occorrono più spesso nella pratica sono

$$21 \pm 3 : 3 = 14 \pm 2 : 2$$
$$21 \pm 14 : 3 \pm 2 = 14 : 2$$

Progressioni per differenza e per quoziente.

Si chiama *progressione per differenza* una serie di termini tali che la differenza di due consecutivi qualunque sia costante.

Possiamo prendere per esempio la serie 22, 19, 16, 13, 10 che si scrive:

$$\div\ 22 . 19 . 16 . 13 . 10 \ldots\ldots$$

e si enuncia 22 sta a 19 come 19 a 16, come 16 a 13, come 13 a 10 ec.

La progressione precedente è decrescente e la sua ragione è 3; al contrario la progressione

$$\div\ 1 . 4 . 7 . 10 . 13 \ldots\ldots$$

è crescente, e la ragione è pure 3.

Un termine qualunque di una progressione per differenza è uguale al primo termine aumentato di tante volte *la differenza* quanti sono i termini che lo precedono, se la progressione è crescente, diminuito se la progressione è decrescente.

$$\text{Così } 19 = 22 - 3,\ 16 = 22 - 3 \times 2,\ 13 = 22 - 3 \times 3$$

nel primo esempio di progressione decrescente; e nel secondo esempio di progressione crescente

$$4 = 1 + 3,\ 7 = 1 + 3 \times 2$$
$$10 = 1 + 3 \times 3.$$

La *somma* di due termini ugualmente distanti dagli estremi in una progressione per differenza è uguale alla somma del primo e dell' ultimo: così nel primo esempio

$$22 + 10 = 19 + 13 = 16 + 16 = 32.$$

Si chiama *progressione geometrica* per quoziente, una serie di termini nei quali il quoziente di due termini consecutivi è costante; come per esempio nella serie 48, 24, 12, 6 ec., che si scrive

$$\div\div\ 48 : 24 : 12 : 6 : 3$$

e si enuncia 48 sta a 24, come 24 a 12, come 12 a 6 ec.

La progressione precedente è decrescente ed ha per rapporto $\frac{1}{2}$. Al contrario la progressione

$$\div\div\ 3 : 6 : 12 : 24 : 48$$

è crescente ed ha per rapporto o quoziente 2.

Un termine qualunque di una progressione per quoziente è uguale al primo termine moltiplicato per il quoziente innalzato alla potenza il cui grado corrisponde al numero dei termini che lo precedono.

$$\text{Così } 24 = 48 \times \frac{1}{2};\ 12 = 48 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$6 = 48 \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

nella prima progressione; e nella seconda

$$6 = 3 \times 2,\ 12 = 3 . 2^2,\ 24 = 3 . 2^3$$
$$48 = 3 . 2^4.$$

Il *prodotto* di due termini ugualmente distanti dagli estremi, è uguale al prodotto degli estremi in una progressione per quoziente

così $48 \times 3 = 24 \times 6 = 12 \times 12 = 144.$

La *somma*, dei termini di una progressione per differenza, è uguale alla *metà* del prodotto che si ottiene *moltiplicando la somma* dei due estremi per il numero dei termini della progressione.

Così $22 + 19 + 16 + 13 + 10 = \left(\frac{22 + 10}{2}\right) \times 5 = 80.$

Per inserire tra due termini dati dei *medii equidifferenti* ossia *aritmetici;* cioè dei termini che formino una progressione per differenza, di cui i primi due sarebbero i termini estremi, bisogna torre il numero più piccolo dal più grande, e dividere il resto per il numero dei medii da inserire aumentato di una unità; il quoziente sarà la differenza o *ragione aritmetica* della progressione ascendente o discendente. Così per inserire 8 medii aritmetici tra 4 e 11 tolto 4 da 11 si divide il resto 7 per 9 e si ha $\frac{7}{9}$ per la differenza della progressione cercata la quale è

$$\div 4 \,.\, 4 + \frac{7}{9} \,.\, 5 + \frac{5}{9} \,.\, 6 + \frac{3}{9} \,.\, 7 + \frac{1}{9} \,.\, 7 + \frac{8}{9} \,.\, 8 + \frac{6}{9} \,.\, 9 + \frac{4}{9} \,.\, 10 + \frac{2}{9} \,.\, 11$$

Il *prodotto* dei termini d'una progressione per quoziente, è uguale *alla radice quadrata* del prodotto degli estremi inalzato alla potenza corrispondente al numero dei termini della progressione.

Così $3 \times 6 \times 12 \times 24 \times 48 =$

$$\sqrt{3^5 \times 48^5} = 248\,832.$$

Per inserire tra due termini dati *dei medii proporzionali* o *geometrici;* cioè dei termini che formano una progressione per quoziente della quale i due alcuni gli estremi; bisogna dividere l'ultimo per il primo, ed estrarne dal quoziente la radice del grado corrispondente al numero dei medii da inserire aumentato di una unità.

Così per inserire 9 medi proporzionali tra 2 e 2048, si divide 2048 per 2, ed il quoziente 1024 la cui radice decima è due, ci da 2 per la ragione della progressione; la quale è

$$\div\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048.$$

RESULTATI SINGOLARI CHE SI OTTENGONO DALLE PROGRESSIONI. Le progressioni aritmetiche e geometriche conducono alla soluzione di alcuni problemi interessanti.

Il dotto istorico delle matematiche Montucla racconta che verso la fine del secolo passato, fu fatta una scommessa tra due persone con le condizioni seguenti: furono posti in linea retta cento sassolini a distanze uguali di una tesa dall'uno all'altro e fu posto un paniere ad una tesa di distanza dal primo sassolino. Un dei due scommesse che sarebbe andato dal cancello del Luxemburgo al cancello del castello di Meudon, e ritornato in meno tempo di quello che sarebbe occorso all'altro per raccorre tutti i sassoli e portarli uno ad uno nel paniere. Questi non potendo persuadersi che ciò fosse possibile scommesse una somma assai forte che perdette.

La cosa si intende facilmente facendo la somma di cento termini della progressione aritmetica il cui primo termine è 1 e la differenza 1; questa somma è 10100. Così che l'uno andando e tornando per raccorre ciascun sasso, aveva da fare in conseguenza 10100 tese, ed era obbligato di abbassarsi e rialzarsi 100 volte. Mentre l'altro, non essendo la distanza dal Luxemburgo a Meudon che 5050 tese al più, non aveva da fare andando e tornando che 10100 tese, e così la distanza stessa da percorrere senza lo incomodo dell'alzarsi ed abbassarsi. Infatti il primo era alla 85ma pietra ed aveva così percorse 7310 tese, quando l'altro tornò da Meudon.

La media tra più quantità essendo la somma di queste quantità divisa per il loro numero, è chiaro che la distanza media da percorrersi per raccorre i 100 sassi era di 101 tesa, metà delle quali nella andata e metà nel ritorno.

È facile adesso il comprendere l'analogia tra la questione precedente e quella delle distanze medie da percorrere per

provvedere i materiali di una strada, come massicciata, rena, sasso trito, destinati al suo mantenimento. Il prezzo di trasporto di questi materiali è sempre determinato da un calcolo di distanza media spesse volte assai complicato.

L'istoria dell'invenzione del giuoco delli scacchi da un curioso esempio della somma dei termini di una progressione geometrica. Dicesi che Sessa figlio di Daher immaginò questo giuoco, nel quale il re quantunque sia il pezzo più importante non può fare un passo senza il soccorso delle pedine, colla mira di rammentare a Scheram uno dei re dell'India i principii di giustizia e d'equità, coi quali doveva governare i suoi soggetti. Scheram, meravigliato di una lezione data in un modo così ingegnoso, permise a Sessa di designare la ricompensa che gli era dovuta. Sessa domandò un chicco di grano per la 1ª casa dello scacchiere, due per la 2ª casa, quattro per la 3ª e così seguitando a raddoppiare sempre fino alla 64ma.

Il principe quasi indignato da prima della modicità della ricompensa richiesta, intese con sorpresa dopo fatti i calcoli, che il numero dei chicchi del grano sarebbe stato.

18 446 774 073 709 551 615.

Il celebre geometra Wallis fa osservare che questa quantità di grano sarebbe una piramide larga lunga ed alta 9 miglia inglesi. Si può anco dire che, sarebbe bisognato una superficie otto volte più grande di quella della terra, supposta interamente seminata di grano, per dare in un anno di che sodisfare al desiderii del modesto Brahmino. Il grano prodotto da questo ricolto coprirebbe almeno tutta la superficie della Francia all'altezza di un metro.

Per trovare la somma dei termini di una progressione geometrica crescente, bisogna moltiplicare il primo termine per il rapporto inalzato alla potenza corrispondente al numero dei termini e diminuito di una unità, e poi dividere il prodotto per il rapporto stesso diminuito di una unità. Nell'esempio precedente il prime termine è 1 il rapporto è 2, e il numero dei termini 64. Si inalza il due alla potenza 64ma, e si toglie un unità al resultato per avere il numero precedente.

Si rammenta talora una avventura simile alla precedente. Un mezzano offre un bellissimo cavallo per il prezzo del 24mo chiodo dei ferri dell'animale, supposto che il prime chiodo valga un centesimo, il secondo 2 centesimi, il terzo 4, e così seguitando e raddoppiare ad ogni chiodo. Si trova che il prezzo del cavallo a tali condizioni anderebbe alla somma esorbitante di 83 886 franchi e 8 centesimi.

La somma dei termini di una progressione geometrica decrescente, si ottiene come nel caso della pregressione crescente, avuto solo riguardo al rapporto il quale essendo minore dell'unità dà le sottrazioni in senso inverso.

La somma dei termini di una progressione geometrica decrescente continuata anco fino all'infinito, è una quantità finita, e determinata, che si ottiene dividendo il primo termine per la differenza tra il rapporto e l'unità.

Con questa ragola si può semplicemente risolvere un paradosso proposto da Zenone capo della setta degli stoici. Achille cammina 10 volte più presto di una tartuca, la quale è innanzi di lui di uno stadio. È impossibile diceva Zenone che egli la raggiunga; perchè mentre Achille fa uno stadio la tartuca ne fa $\frac{1}{10}$ e mentre egli fa questo decimo la tartuca ne fa $\frac{1}{100}$ che gli rimane ancora di giunta, e così seguitando fino all'infinito passerà un numero infinito di istanti prima che l'eroe abbia raggiunto il rettile. Questo ragionamento racchiude un sofisma che consiste nel supporre tacitamente che gli intervalli di tempo nei quali Achille percorre prima uno stadio, poi un decimo, poi un centesimo un millesimo ec. sieno uguali, ma poichè a percorrere $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ ec. di stadio, occorre $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ del tempo che è necessario a percorrere uno stadio; designando per uno il primo intervallo di tempo, saranno gli altri $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ ec. e la somma di tutti i termini della progressione geometrica decrescente

$$\div\div 1 : \frac{1}{10} : \frac{1}{100} : \frac{1}{1000}$$

che è uguale secondo la regola precedente ad $\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1 + \frac{1}{9}$ rappresenterà il tempo necessario all'eroe per raggiungere il rettile.

§ 9. *Dei logaritmi.*

Utilità dei logaritmi. Il modo nel quale abbiamo messo a riscontro le proprietà delle proporzioni a delle progressioni per differenza e per quoziente, ha fatto risaltar la rimarchevole analogia, che esiste fra i risultati dedotti dalle definizioni delle due specie di rapporti. Spingendo questa analogia alle sue ultime conseguenze si giunge alla teoria dei logaritmi, per mezzo dei quali le moltiplicazioni si riconducono a delle addizioni, le divisioni a delle sottrazioni, l'innalzamento a potenza a delle moltiplicazioni, e l'estrazione di radice a delle divisioni.

La scoperta dei logaritmi è dovuta al barone scozzese Neper o (Napier) ed è stata fatta or sono due secoli.

È da desiderare che le sue applicazioni estese fatte conoscere dall'insegnamento del calcolo elementare si riducano alla portata di tutti; e che l'introduzione del sistema decimale, aggiungendo qualche cosa alla facilità dei calcoli, a alla semplicità che si ottiene adoprando i logaritmi nell'eseguire le operazioni numeriche, contribuisca a diffondere questo insegnamento.

Prony fino dalla fine del secolo passato lamentava la mancanza di una istruzione elementare la quale insegnasse il modo di adoprare i logaritmi, e ne componeva una egli stesso destinata a popolarizzarne l'uso e a fare sparire questa lacuna dal sistema di istruzione popolare. A questa non può forse rimproverarsi che l'aver condotto troppo in lungo talora certi sviluppi particolari. Noi ci limiteremo a porre qui dinanzi i dettagli strettamente necessarii all'uso delle tavole logaritmiche.

Origine e proprietà dei logaritmi. Paragonando due progressioni, l'una aritmetica, che abbia per primo termine zero, l'altra geometrica che abbia per primo termine l'unità, come per esempio:

$\div$ 0 . 3 . 6 . 9 . 12 . 15 . 18 . 21 . 24 . ec.
$\div\div$ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 . 64 : 128 : 256. ec.

I termini della progressione aritmetica si chiamano i logaritmi dei termini che occupano il posto medesimo nella progressione geometrica. Sommando i termini 6 e 12 della progressione aritmetica, e moltiplicando l'uno per l'altro i termini 4 e 16 che corrispondono respettivamente a 6 e 12, la somma 18 e il prodotto 64 si corrispondono nelle due progressioni, per cui 18 è il logaritmo di 64.

In generale il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori.

Il logaritmo di un quoziente, è uguale alla differenza tra i logaritmi del dividendo a del divisore.

Il logaritmo di una potenza qualunque di un numero è uguale al prodotto del logaritmo del numero per il grado della potenza.

Il logaritmo di una radice qualunque di un numero è uguale al quoziente del logaritmo del numero diviso per il grado della radice che si deve estrarre.

Il sistema di logaritmi volgarmente in uso si compone di due progressioni.

$\div$	0 .	1 .	2 .	3 .	4 .	5 .
$\div\div$	1 :	10 :	100 :	1000 :	10000 :	100000
			6.			
			1000000 :	ec.		

la seconda delle quali si può mettere sotto la forma

$$\div\div 1 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5 : 10^6 .$$

Tavole dei logaritmi. Perchè le proprietà dei logaritmi sieno applicabili a tutti i numeri, bisogna supporre che tra 1 e 10, tra 10 a 100, tra 100 a 1000 ec. sia stato inserito un numero grandissimo di medii geometriei, in modo che tra i termini intercalari consecutivi che differiranno pochissimo gli uni dagli altri, ve ne sieno due l'uno pochissimo più piccolo, l'altro pochissimo più

grande di 2; altri due, l'uno pochissimo più piccolo l'altro pochissimo più grande di 3; altri due uno pochissimo più piccolo l'altro pochissimo più grande di 4: e così seguitando che lo stesso numero di medii equidifferenti sia stato inserito nella progressione aritmetica. I termini di questa progressione i quali corrispondono ai numeri vicinissimi a 2 a 3 a 4 della progressione geometrica, possono essere considerati come i logaritmi dei numeri 2, 3, 4, ed avranno le proprietà di sopra enunciate.

Per inserire un numero sufficente di medi geometrici tra due quantità date, si può immaginare che questo numero sia preso eguale ad una potenza di 2 diminuità dell'unità, come 7, 15, 31, 63, ec. perchè allora dovremo estrarre una radice di un grado corrispondente ad una potenza esatta di 2 come per esempio la radice 8^a 16^a 32^a 64^a: le quali radici si possono ottenere per mezzo della estrazione successiva di radici quadrate (V. pag. 29).

Qualunque sia il mezzo adoprato per calcolare i logaritmi dei numeri; s'intende di che utilità possa essere una tavola nella quale accanto ai numeri interi siano posti i loro logaritmi corrispondenti con sufficente approssimazione. I caratteri principali di questa tavola si deducono dalle due progressioni fondamentali.

Primieramente i logaritmi dei numeri compresi tra 1 e 10, tra 10 e 100, tra 100 e 1000, ossia tra 1 e 10^1, 10^1 e 10^2, 10^2 e 10^3 sono compresi tra 0 e 1, tra 1 e 2, tra 2 e 3 ec. Chiamando dunque caratteristica la parte intera di un logaritmo si avrà:

1° Che la caratteristica del logaritmo di un numero, sarà uguale al numero delle cifre contenute nella parte intera di questo numero, diminuito di una unità.

2° La caratteristica del logaritmo di un numero, spostando in esso le virgola che separa gli interi dai decimali, cambia sola, mentre la parte decimale del logaritmo non cambia: così

Log. 13 = log. 1300 — log. 100
= log. 1300 — 2
Log. 1245 = log. 1,245 + log. 1000 =
Log. 1,245 + 3.

Dietro questi principii si conosce la caratteristica o parte intera del logaritmo di ogni numero maggiore dell'unità.

Per determinare la caratteristica del logaritmo di ogni numero minore dell'unità, basta immaginare le progressioni primitive prolungate risalendo verso sinistra con la medesima legge.

Ora nella progressione aritmetica proposta, ogni termine è minore di una unità di quello che lo segue alla sua dritta, e maggiore di una unità di quello che lo precede a sinistra; nella geometrica ogni termine è dieci volte più piccolo di quello che lo segue, e dieci volte più grande di quello che lo precede, per cui potremo scrivere

$$\div \ldots\ldots \bar{4} \cdot \bar{3} \cdot \bar{2} \cdot \bar{1} \text{ ec.}$$
$$\div\div \ldots — \cdot \frac{1}{10000} \cdot \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{10} \text{ ec.}$$

le cifre $\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$ ec. che portano in alto il segno — (meno) indicano che questi numeri sono negativi, cioè debbono esser sottratti invece che aggiunti.

Se dunque il logaritmo di 2 è 0,30103 quello di 20 sarà 1,30103 quello di 200 sarà 2, 30103 quello di 0,2 sarà $\bar{1}$, 30103 quello di 0,02 sarà $\bar{2}$, 30103 ec.

Poichè si conosce a priori la caratteristica di un numero qualunque, più grande o più piccolo dell'unità, è inutile il porre nelle tavole la caratteristica dei logaritmi: tuttavia le piccole tavole di Lalande danno i logaritmi dei numeri da 1 a 10000 con le respettive caratteristiche. Ma in molti calcoli bisogna sopprimere mentalmente le caratteristiche, e dare al risultato la caratteristica che gli aspetta.

Le tavole più estese che sieno state ancora pubblicate sono quelle di Callet; vanno fino a 108000 e contengono i logaritmi dei numeri senza caratteristica, con 8 decimali per i numeri interi minori di 1200, e con 7 decimali per gli altri numeri interi fino a 108000.

Risulta dai principii precedenti, che si potrebbero sopprimere tutti i logaritmi dei numeri compresi tra 1 e 1000, e porre soltanto quelli dei numeri compresi tra 1000 e 10000, e che si potrebbero nel modo stesso sopprimere i logaritmi dei numeri compresi tra 1 e 10000 nelle

tavole che vanno fino a 100000. Ciò appunto ha fatto Borda nelle tavole logaritmiche che ha riunite alle sue tavole trigonometriche decimali.

USO DELLA PICCOLA TAVOLA INSERITA NELL'OPERA. Le tavole logaritmiche che abbiamo riunito alle tavole trigonometriche all' articolo trigonometria, contengono i logaritmi dei numeri da 4000 a 10000 di 5 in 5 unità ec. I limiti di quest' opera non permettendo di inserire una tavola che desse i logaritmi di tutti i numeri interi consecutivi da 1 fino a 10000, si potranno adoprare quelli che abbiamo inseriti in molti casi, nei quali non si ha bisogno di una grandissima approssimazione nei calcoli.

Si troverà la parte decimale del logaritmo che corrisponde a un numero dato compreso tra 1000 e 10000, cercando le due prime cifre a sinistra di questo numero, nella prima colonna verticale a sinistra della tavola, intitolata numeri, e seguendo la linea orizzontale che risponde a questa due cifre, finchè si incontri la colonna verticale la quale comincia per le altre due cifre del numero dato; la caratteristica è nota a priori.

Così per ottenere il logaritmo di 8575, si cerca il numero 85 nella prima colonna a sinistra della terza pagina; si segue la linea orizzontale che risponde a questo numero, sinchè si incontri la colonna verticale in testa della quale è posto il 75, ed a questo incontro si trova 93323 adunque

$$\log. 8575 = 3, 93323.$$

si otterrebbe nel modo stesso

$$\log. 9700 = 3, 98677$$

ed in conseguenza $\log. 97 = 1, 98677$

come pure $\log. 7000 = 3, 84510$

e quindi $\log. 7 = 0, 84510$

Si veda dunque che questa tavola da ancora i logaritmi dei numeri compresi tra 1 e 1000.

Non contenendo però che i logaritmi dei numeri di 5 in 5 unità; bisognerebbe per i numeri che non sono multipli esatti di 5, prendere nella tavola il logaritmo del numero che meno ne differisce. Per esempio invece del logaritmo di 5848 prendere il log. 5850 = 3,76716, invece del logaritmo di 122 prendere il log. 120 = 2,07916.

. Reciprocamente quando è necessario cercare nelle tavole il numero a cui corrisponde un logaritmo dato, si prende nelle colonne che contengono i logaritmi quello che è più vicino al logaritmo dato; sulla sinistra della linea orizzontale di questo logaritmo, si trovano le due prime cifre di sinistra del numero cercato, la altra due si trovano in testa alla colonna verticale che contiene il logaritmo dato.

Così dato il logaritmo

$$3, 65849$$

si trova 65849 sulla linea orizzontale che comincia col numero 45, e nella colonna verticale che ha in testa 55 si ha dunque

$$3, 65849 = \log. 4555$$

si avrebbe nel modo stesso

$$1, 27299 = \log. 23,60$$
$$0, 86225 = \log. 7,285$$

e finalmente

$$\bar{3}, 23805 = \log. 0, 001735$$

Sapendo trovare i logaritmi dei numeri, ed i numeri che corrispondono a logaritmi dati, si eseguiscono con questa tavola tutte le operazioni nelle quali può farsi utilmente uso dei logaritmi. Soltanto esigono alcune osservazioni preliminari i logaritmi della quantità più piccole dell' unità.

CALCOLO DELLE QUANTITA' NEGATIVE. Il logaritmo di una frazione propriamente detta può presentarsi sotto forma interamente negativa; perchè il logaritmo del denominatore dovendo essere sottratto dal logaritmo del numeratore che è più piccolo, converrà fare la sottrazione in senso inverso e dare al resto il segno —.

Così $\log. \frac{5}{15} = \log. 5 - \log. 15$

ora $\log. 15 = 1, 17609$

$\log. 5 = 0, 69897$

$\log. \frac{5}{15} = - 0,47712.$

Questo logaritmo può essere disposto in modo che la sola caratteristica sia negativa; basta per questo aggiungere e torre un numero intero più grande del logaritmo negativo. Qui aggiungendo e togliendo l'unità si avrebbe

$$\text{Log.}\ \frac{5}{18} = \bar{1} + (1,00000 - 0,47712)$$
$$= -\overline{1,52288}.$$

Reciprocamente un logaritmo che abbia la caratteristica negativa, può essere trasformato in un logaritmo interamente negativo. Così

$$\bar{3},23895 = -(3,00000 - 0,23895)$$
$$= -2,76105.$$

Per fare quindi le diverse operazioni dell'aritmetica sulle quantità negative, bisogna aver riguardo alle seguenti regole.

Si fa l'addizione senza cambiare i segni + e —; in modo che le quantità negative debbano essere realmente sottratte, quando figurano nell'operazione che si va facendo. Per sottrarre una quantità positiva o negativa, bisogna aggiungerla con segno contrario a quello che ha, così per sottrarre — 2,76105; da 4,00000 si aggiungerà ad esso + 2,76105, e si avrà il resultato 6,76105; per torre $\bar{3},23895$ da 4,00000, bisogna aggiungere + 3 a 4, il che da 7 e torre da questo la parte 0,23895: il resultato finale sarà anco questa volta 6,76105, come poteva presumersi osservando che $\bar{3},23895 = -2,76105$.

La moltiplicazione delle quantità affette dai segni + e — da luogo a 4 casi differenti.

\+ moltiplicato per + da un prodotto il cui segno è +
\+ . . . . . per — da un prodotto il cui segno è —
— . . . . . per + da un prodotto il cui segno è —
— . . . . . per — da un prodotto il cui segno è +

Questa regola suole enunciarsi dicendo che il prodotto di due termini affetti dal medesimo segno ha il segno +, quello di due termini affetti da segni contrarii ha il segno —

Quando si debbono sommare o sottrarre più logaritmi ad un tempo, è facile ricondurre l'operazione ad una semplice addizione, sostituendo i complementi aritmetici ai logaritmi che si debbono sottrarre.

Il complemento aritmetico di un logaritmo, è un secondo logaritmo, che aggiunto al primo da una somma zero. Onde apparisce che la sottrazione del logaritmo primitivo, può essere realmente cambiata nella addizione del suo complemento.

Ecco la regola generale, per scrivere il complemento aritmetico di un logaritmo alla prima ispezione del logaritmo.

1° Bisogna aggiungere — 1 alla caratteristica, dopo avere cambiato il segno di essa, prendendola negativamente se è positivo, o positivamente se è negativo.

2° Torre da 9 tutte le cifre a destra della virgola, eccettuata l'ultima che deve essere tolta da 10, e segnare l'avanzo.

Primo esempio. Sia il logaritmo 4,76543; cambiando di segno alla caratteristica avrò — 4 e aggiungendo — 1 avrò — 5; scrivendo poi a destra della virgola quello che manca a ciascuna delle prime quattro cifre per arrivare a 9, e alla 5ª per arrivare a 10 avremo

$$\text{compl. } 4,76543 = \overline{5,23457}.$$

Secondo esempio: sia il logaritmo dato $\bar{3},64330$; la caratteristica — 3 presa con segno cambiato è 3, e aggiuntovi — 1 si ha 2, si sottraggono da 9 le prime tre cifre a destra della virgola, e da 10 la quarta che è l'ultima cifra significativa, lo zero resta. Questa operazione ci da:

$$\text{compl. } \bar{3},64330 = 2,35670.$$

Terzo esempio. Il logaritmo dato è $\bar{1},28010$. La caratteristica cambiatovi segno diviene + 1, aggiuntovi — 1 resta zero quindi

$$\text{compl. } \bar{1},28010 = 0,71990.$$

APPLICAZIONI NUMERICHE. Posti questi preliminari; passiamo all'uso dei logaritmi nelle diverse operazioni della aritmetica. Si cerchi il valore numerico dell'espressione

$$x = \frac{125,52 \times 3120 \times 52344}{312,57 \times 7220,1 \times 80724}$$

si avrà evidentemente log. x = alla somma dei logaritmi dei fattori che entrano nel numeratore, sottrattavi la somma dei logaritmi dei fattori che entrano nel denominatore, e più semplicemente aumentato della somma dei complementi di questi logaritmi. Ora nella piccola nostra tavola si trovano i valori approssimati

log.	125,50	= 2,09864
log.	3420,00	= 3,53403
log.	52350,00	= 4,718 2
compl. log.	312,50	= $\overline{3}$,50515
compl. log.	7220,00	= $\overline{4}$,14146
compl. log.	80700,00	= $\overline{5}$,09313
Somma . . .		$\overline{1}$,09133 =

log. 0,1235. Facendo il calcolo più esattamente, con tavole logaritmiche più estese, si sarebbe trovato per il valore di x 0,123375; dunque la differenza non è che di 0,000125 su 0,123375, ossia di $\frac{1}{987}$ del valore vero del resultato.

Si vuole inalzare alla 9.ma potenza il numero 22,8 si ha

$$\log.\ 22{,}8 = 1{,}35793$$

e moltiplicando per 9 si ottiene

$$12{,}22137 = \log.\ 1665 \times 10^{8}$$

Il numero cercato è dunque approssimativamente 1 665 000 000 000.

Quale è l'ottava potenza di 0,005225?

$$\log.\ 0{,}005225 = \overline{3}{,}71809$$

moltiplicando per 8, ed osservando che da un lato la parte decimale positiva da un numero di interi nel prodotto uguale a + 5, e dall'altro il prodotto di $\overline{3}$ per 8 è — 24 si avrà

$$\overline{19}{,}74472 = \log.\ \frac{5{,}555}{40^{18}}$$

Il numero cercato è dunque approssimativamente

0, 000 000 000 000 000 000 5555.

Si cerchi la radice quadrata di 13,8237; dalla piccola tavola si ha

$$\log.\ 13{,}80 = 1{,}13988$$

la metà di questo logaritmo

$$0{,}56994 = \log.\ 3{,}715.$$

La radice esatta fino alla 6ª decimale sarebbe $\sqrt{13{,}8237} = 3{,}716023$; abbiamo dunque avuto un resultato che differisce del vero di $\frac{3}{8718}$ o di $\frac{1}{1239}$.

Si vede con che facilità maravigliosa l'uso dei logaritmi conduce a risultati, ai quali non si perverrebbe coi metodi ordinari che con fatica molto maggiore.

Dividendo come nella figura una retta in 9 parti, proporzionali ai logaritmi dei numeri 2, 3, 4 ec. 10, e sovrapponendo a ciascun punto di divisione i numeri corrispondenti 1, 2, 3, 4 . . . 10; tornando a dividere le porzioni comprese tra 1 e 2 tra 2 e 3 tra 3 e 4 ec. in parti che rappresentino i logaritmi dei numeri

1, 1	1, 2	1, 3 ec.
2, 1	2, 2	2, 3 ec.
3, 1	3, 2	3, 3 ec.,

e così successivamente ripetendo l'operazione, sinchè le dimensioni della retta e delle suddivisioni successive lo comportano, rappresenteremo in questa retta i logaritmi dei numeri compresi tra 1 e 10, espressi per interi e per decimali. Ripetendo accanto alla prima una seconda retta, una terza, ec. del tutto identiche, fermeremo una scala, nella quale le divisioni successive serviranno per rappresentare i logaritmi dei numeri compresi tra 10 e 100, tra 100 e 10000 e così seguitando.

Sovrapponendo a ciascun punto di divisione i numeri corrispondenti, noi potremo servirci di questa scala come di una tavola logaritmica prendendo su questa con il compasso delle linee proporzionali al logaritmo, che corrisponde al numero segnato sopra ciascuna divisione: le somme, le sottrazioni, le moltiplicazioni, le divisioni dei logaritmi si fanno sommando, sottraendo ec. tra loro

queste linee. I resultati di questa operazioni condurraneo le punte del compasso a segnare sella retta un punto, al quale corrisponderà esattameete o prossimameete un numero, che rappreseoterà il resultato delle operazioni fatte sui numeri dati. Tale è il fondameeto della riga pei calcoli numerici, la quale a cagione delle inesattezze inevitabili nella costruzione di siffatti istrumenti, nou da con qualche precisione che le prime tre o qeattro cifre del resultato.

Sebbene per il più grande numero dei casi possano bastare le tavole che abbiamo rienite a questa pubblicazione, diamo tuttavia sulle disposizioni e sull'uso delle tavole logaritmiche più conosciute dei particolari, che permetteraneo al lettore di ricorrere a queste, quando lo esiga la estora del calcoli che egli ha da fare, senza che debba occeparsi di studiare con fatica le lunghe istruzioni dalle quali sono ordinariamente accompagnate.

Uso delle tavole di Lalande. La Caille e Lalande pubblicarono per la prima volta nel 1760 delle piccole tavole logaritmiche simili presso a poco a quelle che furoeo stereotipate da Firmin Didot eel 1802, e che furono rivedute dal solo Lalande.

Queste tavole noe coetengono che 5 decimali; e Lalande invocando i suoi 50 anni di esperienza asserisce, che la massima parte dei calcoli non domandano una maggiore approssimazione. Egli noe ha adoperato che queste per il calcolo di qualche centinaio di ecchiasi. Questo volume è stato ristampato con 7 decimali, aumentando il formato senza utilità, e lasciando nella nuova pubblicazione correre degli errori. Ie tal modo gli editori hanno male imitato Lalande, che offrive 100 fraechi ed anco 1000 franchi per ogni errore che si fosse trovato nello sue tavole.

Diamo come modello del libro di Latande, la pagina seguente che contieeo i logaritmi dei eumeri compresi tra 990 e 1080 coi numeri corrispondenti accanto.

Abbiamo già detto che la caratteristica è completameete ieutile, perchè bisogna cambiarla quando si considerano i numeri più grandi di 10000, o più piccoli dell' unità. Si poteva aneo sopprimere la prima chiliade; potendosi fare nolle successive la ricerea del logaritmo di un eumero, o del numero corrispondeete ad un logaritmo dato. Queste due operazioni si fanno immediatamente per i eumeri che non hanno più di quattro cifro significative; coal si trova:

$$\begin{aligned} \log\ 1008 &= 3{,}00346 \\ \log.\ 10{,}42 &= 1{,}01787 \\ \log\ 99500 &= 5{,}99782 \end{aligned}$$

e reciprocamente ai logaritmi

$$\left.\begin{matrix} \bar{4}{,}99607 \\ 2{,}01995 \\ 7{,}03400 \end{matrix}\right\} \text{corrispondono i eumeri} \left\{\begin{matrix} 0{,}991 \\ 104{,}7 \\ 10740000{,}0 \end{matrix}\right.$$

A destra della colonna dei logaritmi vi è una colonna che ha in testa la lettera D, che esprime le differenze de' duo logaritmi coesecutivi conteeuti nelle tavole, ottenute sottraendo il minore di queati logaritmi dal maggioro che lo segue immediatamente. Ecco il modo di adoprare queata colonea.

1° Quando si cerca il logaritmo di ue numero di 5 cifre significative, come 27548; si comincia dal trovare nelle tavole la parte decimale del logaritmo che corrisponda al numero 2754, eaprassa dalle quattro prime cifre significative; questa parte decimale è 43996, a questa si aggiunge il prodotto della differenza 16 per l'eltima cifra 8 del numero 27548; osservando che 16 rappreseetaedo la differenza in decimali del 5° ordiee, tra il logaritmo di 27540 ed il logaritmo di 27550, il prodotto $16 \times 8 = 128$ rappresenta unità decimali del 6° ordiee quando si cerca il logaritmo di 27528, il calcolo si dispone come appresso

$$\begin{aligned} \log.\ 2752 &= 43996 \\ 16 \times 8 &= \quad 128 \\ & \overline{44{,}40088} = \log.\ 27548 \end{aligned}$$

non dovendo prendersi che 5 cifre decimali si considererà il numero cercato uguale a 4, 44009; sopprimendo l'ultima cifra che è maggiore di 5, e aumentando di 1 la peeultima.

2° Reciprocamaeta se si cercano le cinque prime cifra sigeificative di un eemero corrispondeute ad ue logaritmo dato, a 5893 per caempio, astrazione fatta dalla caratteristica, si cerca nelle

MODELLO DELLE TAVOLE DI LALANDE, CHE CONTENGONO I LOGARITMI DEI NUMERI DA 1 A 10000.

NUMERI	0.16' 30'' LOGARITMI	D.	NUMERI	0.17' 0'' LOGARITMI	D.	NUMERI	0.17 30'' LOGARITMI	D.
000	0,00000	43	1000	3,00000	43	1000	3,00110	41
001	0,00007	44	1001	3,00003	43	1001	3,01100	42
002	0,00051	44	1002	3,00043	43	1002	3,01201	41
003	1,90000	44	1003	3,00088	42	1003	3,01243	42
004	1,00130	43	1004	3,01030	43	1004	3,01304	41
005	1,00182	44	1005	3,01072	43	1005	3,01313	41
006	1,00220	44	1006	3,01113	42	1006	3,01360	41
007	1,00270	43	1007	3,01157	43	1007	3'01407	42
008	1,00313	44	1008	3,01199	43	1008	3,01448	41
009	0,00357	43	1009	3,01242	42	1009	3,01490	41
1000	3,00000	43	1010	3,01284	43	1010	3,02331	42
1001	3,00043	44	1011	3,01320	43	1011	3'02373	40
1002	3,00087	43	1012	3,01363	42	1012	3,01613	41
1003	3,00130	43	1013	3,01419	43	1013	3,01659	41
1004	3,00173	44	1014	3,01462	43	1014	3,01604	41
1005	3,00217	43	1015	3,01504	42	1015	3,00735	41
1006	3,00260	43	1016	3,01550	42	1016	3,02770	40
1007	3,00303	43	1017	3,01579	43	1017	3'02810	41
1008	3,00346	43	1018	3,01620	42	1018	3,01807	41
1009	3,00389	43	1019	3,01661	41	1019	3,01806	40
1010	3,00432	43	1020	3,01703	42	1020	3,02886	41
1011	3,00475	43	1021	3,01743	42	1021	3,02970	40
1012	3,00518	43	1022	3,01787	43	1022	3,03010	41
1013	3,00561	43	1023	3,01828	42	1023	3,03050	40
1014	3,00604	43	1024	3,01870	42	1024	3,03100	41
1015	3,00647	43	1025	3,01913	43	1025	3,03141	40
1016	3,00690	43	1026	3,01953	42	1026	3,03181	41
1017	3,00733	43	1027	3,01999	41	1027	3,03222	40
1018	3,00775	43	1028	3,02039	42	1028	3,03262	40
1019	3,00817	43	1029	3,02078	41	1029	3,03302	40
1020	3,00860	43	1030	3,02119	42	1030	3,03342	40

tavole il logaritmo immediatamente più piccolo, che è 58939, e corrisponde al numero 3885 il quale dà le prime quattro cifre cercate. Per aver la quinta, si prende la differenza 4 tra il logaritmo dato 58943 e 58939; si divide questa per la differenza 11 che passa tra i numeri consecutivi 3885 e 3886; il quoziente $\frac{40}{11}$, o l'intero che più si avvicina a questo quoziente, da la cifra cercata. Ora $\frac{40}{11} = 3{,}64$ ed il quoziente intero il più vicino a questo numero è 4, quindi le prime cinque cifre significative del numero cercato sono 38854.

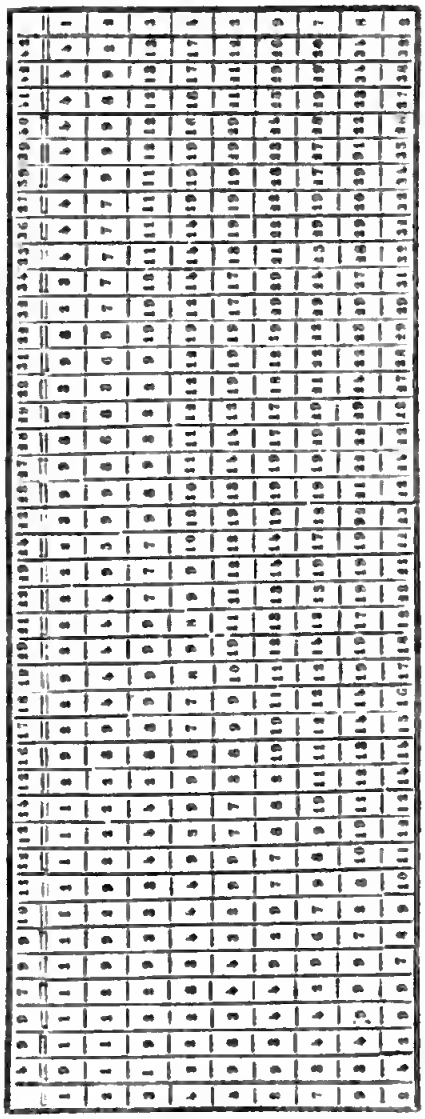
Prony nella sua istruzione elementare e pratica che abbiamo rammentata, ha data una piccola tavola ausiliare, che può adoperarsi utilmente insieme coo le tavole di Lalande, e che noi riproduciamo nella pagina segueote.

La colonoa orizzootale superiore contiene tutte le differeoze comprese nelle colonne D delle tavole di Lalande, che vanoo dalla più piccola che è 4 alla più grande che è 44.

La colonna verticale in principio del quadro a sinistra contiene la quinta cifra significativa dei numeri dati, di cui si cerca il logaritmo, o cercati quando il logaritmo è dato.

Se si domanda la parte proporzioonle che deve aggiungersi a 43996, per formare il logaritmo di 27548; si segue la colonna orizzontale che incomincia dalla cifra 8, sinchè si giunga alla colonna verticale che ha in testa la differeoza 46,4a quale corrisponde nelle tavole al logaritmo 43996, e si trova la parte proporzionale

TAVOLA DI PRONY AUSILIARE ALLE TAVOLE LOGARITMICHE DI LALANDE.



43 alla casa che corrisponde all' incontro delle due colonne; per cui il logaritmo cercato diviene 4,44009.

Reciprocamente per avere la quinta cifra 4 del numero che ha per logaritmo 58943, si discende la colonna verticale che comincia dalla differenza 44, la quale corrisponde nelle tavole al logaritmo 58939, sinchè si trovi la differenza 4 che corre tra 58943 e 58939: di fronte a questa differenza quattro, sulla stessa colonna orizzontale a sinistra si trova il numero 4, che è la 5ª cifra cercata del numero 38854, del quale le prime quattro cifre erano state trovate nelle tavole.

Uso delle tavole di Callet. Le tavole di Callet son necessarie pei calcoli che richieggono molta precisione. Non possiamo darne un modello che non si adatterebbe al formato di questo libro, e supporremo che si abbiano sotto l' occhio queste tavole, o almeno quella parte che contiene i logaritmi dei numeri da 1 a 108000.

Le cinque prime pagine, nelle quali sileg-ge in alto Chiliade I, contengono i numeri da 1 a 1200 nelle colonne che hanno in testa la lettera N. A destra di ciascuno dei numeri naturali contenuti in queste colonne si trovano i logaritmi di questi numeri, con 8 decimali senza caratteristica, contenuti nelle colonne intitolate log.

Cominciando dalla 6ª pagina fino alla fine delle tavole, a sinistra di ogni pagina vi sono due colonne contenute tra due filetti doppii, che hanno in alto gli indici Od. 2d; Od. 3d ec.; alle quali non è d'uopo badare per i calcoli aritmetici, non occorrendone l'uso.

La colonna intitolata N, contiene dalla 6ª pagina in poi i numeri da 1020 sino a 10790; questi numeri sono scritti per intiero soltanto di cinque in cinque; negli intervalli non sono poste che le 2 ultime cifre di ciascun numero, e bisogna intendere che queste siano precedute a sinistra dalle due prime cifre del numero scritto per intero, che le precede in colonna verticale pei numeri compresi tra 1020 a 9999, e dalle prime tre cifre di questo numero per quelli compresi tra 10000 e 10799.

Così 3943 si trova in colonna verticale sotto il numero 3940, ed è indicato solamente dalle ultime due cifre 43, a sinistra delle quali bisogna intendere preposte le cifre 39 del numero 3940 che lo precede in colonna verticale.

Il numero 10467 trovasi al disotto del numero 10465 indicato dalle sole cifre 67, a sinistra delle quali bisogna sottintendere le cifre 104 del numero 10465, che lo precedo in colonna verticale. Ecco frattanto come sono indicati i numeri superiori a quelli contenuti nella colonna N fino al numero 107999.

In ogni pagina a destra della colonna N vi sono dieci colonne intestate con le cifre 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 (un filetto doppio separa la colonna 4 dalla colonna 5 per facilitare la ricerca dei numeri contenuti in ogni pagina) e la riunione di una di queste cifre con le quattro o le cinque cifre della colonna N, da tutti i numeri di 5 cifre da 10200 fino a 99999, e tutti quelli di sei da 100000 fino a 107999.

Ecco come sono disposti i logaritmi che corrispondono ai numeri naturali della tavola. Questi dalla 5ª pagina in poi sono espressi da sette cifre decimali; le prime tre di queste cifre sono isolate alla sinistra della colonna O, le altre quattro si trovano nella colonna verticale che ha in testa l'ultima cifra significativa del numero, supposto minore di 108000, del quale si cerca il logaritmo, e all'incontro di questa colonna con la linea orizzontale che contiene le quattro o cinque prime cifre di questo numero, che sono nella colonna N.

Le tavole di Callet sono benissimo disposte, per distinguere a colpo d'occhio senza temer d'errore i gruppi di quattro cifre, che in una data pagina debbono essere riuniti ad un gruppo di 3 cifre posto nella colonna O. Se nella colonna O della pagina 7 si prende per esempio il gruppo di tre cifre 044, si conosceranno tutti i gruppi di quattro cifre ai quali può essere riunito, notando sulla linea orizzontale nella quale è posto dopo alcune case bianche una prima casa che contiene le cifre 0299; questo è il primo gruppo che riunito a 044 da un insieme di 7 cifre 0440299 che corrispondo alla parte decimale del logaritmo di 11067. Venticinque numeri interi consecutivi da 11067 a 11091 hanno un logaritmo la cui parte decimale comincia con 044. I gruppi di quattro cifre corrispondenti a ciascuno sono i tre 0299, 0692 e 1084, coi quali ha fine la linea orizzontale di fronte al 044, i dieci della 2ª linea seguente, i dieci della 3ª successiva, e due in quella che vien dopo 9315, 9707: la linea è interrotta dopo il 9707 per indicare che i gruppi successivi a questi debbono essere riuniti, cominciando dal primo 0099, al gruppo 045. Ed a questo vanno uniti tutti i gruppi successivi fino ad una spezzatura nuova, che separa 9876 da 0267, che è il primo il quale debba essere riunito a 046, e così seguitando.

Accade che nel passaggio da una classe di gruppi di quattro cifre all'altra non vi è bisogno di interruzione, quando questo ha luogo nel passare da una fila orizzontale alla successiva. Questo caso si verifica nella pagina 6, quando da 0309638 parte decimale del logaritmo di 10739, si passa a 0310043 parte decimale del logaritmo di 10740.

Le tavole di Callet vanno da 1 a 108000, per condurle fino ad 1000000 bisognerebbe aggiungervi 892000 altri numeri, e il loro volume diverrebbe molto incomodo. Possono però estendersi facilmente a tutti i numeri del primo milione, per mezzo delle tavole ausiliari che sono sulla dritta della pagina contrassegnata con l' indicazione diff. (differenze).

Queste tavole incominciano dai numeri, che rappresentano le differenze tra i logaritmi successivi contenuti nella pagina, e contengono i nove multipli semplici che danno le parti proporzionali, delle quali abbiamo già parlato a proposito delle tavole di Lalande.

Si tratta di trovare il logaritmo per es. di 426782. Si comincia dal prendere il logaritmo di 426780, e per correggere l' errore dipendente dalla cifra 2 che abbiamo trascurato, si aggiungono a questo logaritmo 20 unità del 7mo ordine decimale, che stanno dirimpetto alla cifra 2 nella colonna diff. e al disotto di 102, chè è la differenza tra i log. di 42678 e 42679.

L' operazione inversa nella quale si cerca un numero più grande di 108000, che corrisponde a un logaritmo dato, si eseguisce con la stessa facilità.

Sia per esempio il logaritmo dato $\bar{2},0401037$; fatta astrazione dalla caratteristica, si trova il logaritmo 0401878 più piccolo di esso, è quello che più gli si avvicina; esso corrisponde al numero 10967 e differisce di 159 dal logaritmo dato; e poichè nella tavola delle parti proporzionali 159 corrisponde alla cifra 4, il numero cercato si comporrà delle cifre 109674, e il numero corrispondente al logaritmo $\bar{2},0401037$ sarà 0,0109674.

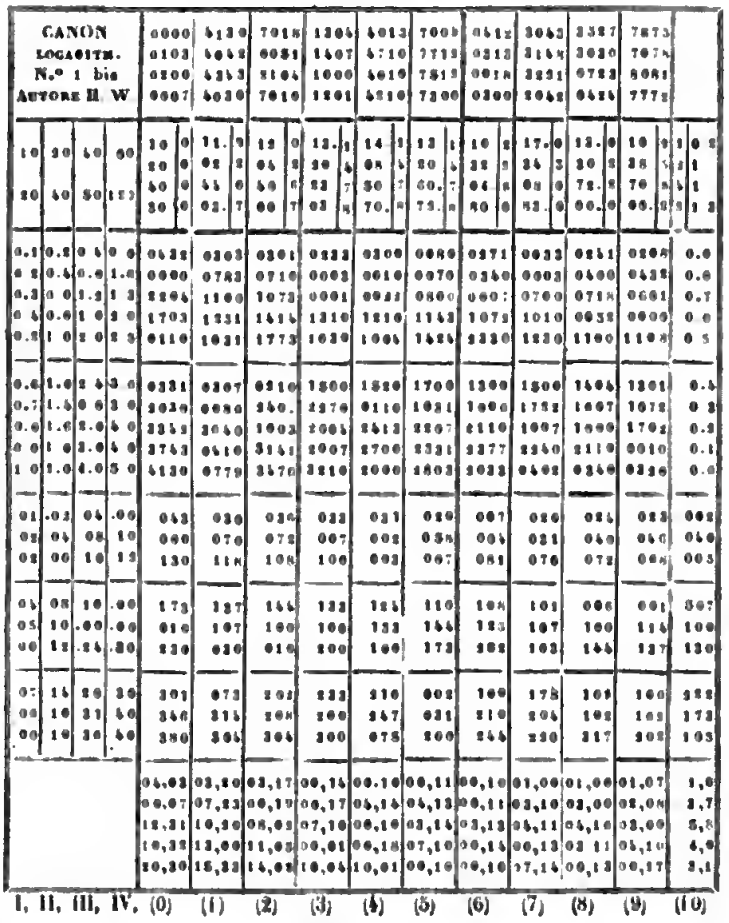
Tavole logaritmiche di Wronski. Avanti di por termine a ciò che riguarda i logaritmi, rammenteremo le *tavole logaritmiche* ancor poco note che sono dovute a Wronski. Questo geometra si è proposto di ridurre a un piccolissimo formato le più estese tavole logaritmiche, e diminuirne il volume ed il prezzo tanto da promuoverne l' uso in tutte le classi della società. La sua tavola logaritmica n° 4, con la quale si ottengono con 7 decimali i logaritmi dei 100000 primi numeri come nelle tavole di Borda, non occupa che $\frac{1}{65}$ della superficie delle cifre di queste tavole; e supposte le cifre della stessa grandezza di quella delle tavole di Borda, non ne occuperebbe che $\frac{1}{78}$; con qualche altra semplificazione sarebbe stato possibile ridurla anco ad $\frac{1}{91}$; se si contano i margini che si ripetono inutilmente ad ogni pagina delle tavole ordinarie, e che contribuiscono ad aumentarne il volume, la riduzione è anco per più grande.

La tavola n° 1 bis tolta da Wronski, la quale contiene come le piccole tavole di Lalande i logaritmi con cinque decimali di tutti i numeri interi fino a 10000, e che noi riportiamo nella pagina seguente insieme col modo di servirsene, offre un esempio di questa diminuzione di volume.

In questa dobbiamo primieramente osservare che è divisa: 1° in scompartimenti orizzontali designati dalle lettere A, B, C, D, E, due delle quali come C o D hanno degli indici numerici che corrispondono ad altrettante suddivisioni; 2° in 15 colonne verticali, delle quali le prime quattro a sinistra sono contrassegnate dalle cifre romane I, II, III, IV, le altre undici dalle cifre 0, 1, 2, 3, ec. Si trovano dunque facilmente i numeri designati per mezzo della lettera dello scompartimento orizzontale e della linea di questo scompartimento; e dalla cifra della colonna verticale alla quale corrispondono.

Ora i numeri naturali da 1 a 10000, sono contenuti tutti nello spazio occupato dalla squadra formata dallo scompartimento B, e dal sistema di colonne verticali I, II, III, IV; vi sono però repartiti per porzioni integranti; che debbono essere disposte in modo che i punti i quali le contrassegnano si trovino sulla stessa colonna verticale, e che facendo la loro somma si componga il numero cercato. Le porzioni integranti generalmente sono tre. 1° Le porzioni iniziali, le quali si trovano nello scompartimento orizzontale B in corrispondenza alle colonne numerate da (0) a (9), e occupano la parte a sinistra di queste colonne; si riconoscono al punto che le contrassegna. 2° Le porzioni medie che sono nella parte verticale della squadra corrispondente alle lettere C1 C2, e alle colonne I, II, III, IV. 3° Le porzioni fi-

TAVOLA LOGARITMICA DI HOËNÉ VRONSKI.



CANON LOGARITM. N.° 1 bis AUTORE H. W																							
					0000	5130	7918	1284	4013	7003	0512	3043	2327	7873									A
					0103	5643	8051	1407	5710	7713	0213	3144	3020	7978									
					0200	5213	8184	1000	5019	7813	0018	3221	0723	8081									
					0007	5030	7010	1201	5210	7200	0300	3042	0424	7772									
10	20	40	60		10	0	11.	9	12	0	12.	1	14	1	13	1	16	2	17.	0	13.	0	18	0	1	0	2	B
					20	0	22	2	24	2	26	4	28	4	30	4	32	4	34	3	36	2	38	1	1			
20	40	80	120		40	0	44	6	48	6	52	7	56	7	60.	7	64	6	68	6	72.	5	76	3	1			
					30	0	62.	7	66	7	63	8	70.	8	75.	8	80	8	82.	0	86.	0	90.	0	1	2		
0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0432	0263	0301	0222	0200	0080	0271	0033	0251	0204	0.0								C 1
0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0000	0782	0710	0003	0010	0070	0340	0003	0400	0422	0.0								
0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	2204	1100	1073	0001	0021	0800	0007	0700	0718	0661	0.7								
0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	1703	1231	1414	1210	1210	1142	1073	1010	0032	0000	0.0								
0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	0110	1021	1773	1020	1004	1424	2230	1220	1100	1102	0.5								
0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	0231	0207	0210	1300	1320	1700	1300	1300	1404	1201	0.4								C 2
0.7	1.4	2.1	2.8	3.5	2020	0000	240.	2270	0110	1021	1000	1772	1007	1072	0.3								
0.8	1.6	2.4	3.2	4.0	2343	2040	1002	2004	2412	2207	2110	1007	1000	1702	0.2								
0.9	1.8	2.7	3.6	4.5	2743	0410	3141	2007	2700	2321	2277	2240	2110	0010	0.1								
1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	4130	0779	3470	2210	2000	1803	2023	0402	0340	0220	0.0								
01	02	04	06	08	043	030	034	022	021	020	007	020	024	023	002								D 1
02	04	08	12	16	060	070	072	007	002	038	004	021	040	040	040								
03	06	12	18	24	130	118	108	100	003	067	081	070	072	064	005								
04	08	16	24	32	173	137	144	133	124	110	108	101	096	001	307								D 2
05	10	20	30	40	210	107	100	100	133	144	133	107	100	114	100								
06	12	24	36	48	230	020	010	200	100	173	202	103	144	127	130								
07	14	28	42	56	301	072	202	222	210	002	100	178	101	100	222								D 3
08	16	32	48	64	346	215	208	200	247	021	210	204	102	103	172								
09	18	36	54	72	330	304	304	300	078	100	244	230	217	202	103								
					04,02	03,20	03,17	00,14	00,10	00,11	00,10	01,00	01,00	01,07	1,0								E
					09,07	07,23	06,19	06,17	04,14	04,13	00,11	02,10	02,00	02,08	2,7								
					13,31	10,30	08,21	07,10	06,10	03,14	03,13	04,11	04,10	03,00	3,8								
					18,33	13,00	11,03	09,01	06,18	07,10	00,14	00,13	03 11	04,10	4,0								
					20,30	16,33	14,03	10,04	10,01	09,10	00,10	07,14	00,13	00,17	3,1								
I, II, III, IV.					(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)								

nali che sono nello stesso lato della squadra verticale, ma corrispondenti alli scompartimenti D1 D2 D3.

Per formare il numero 2372 secondo la nostra tavola, si separano le due cifre di destra, e resta il numero 23, che è compreso tra i numeri 20 e 40 dello scompartimento orizzontale B colonna verticale II; si cerca il numero più vicino a 23 nella seconda linea orizzontale dello scompartimento B e si trova 22. Occupando il 22 la seconda linea orizzontale nello scompartimento B della squadra, si deo cercare la porzione media nella seconda colonna verticale segnata II; questa porzione media più prossima a 17 è 1, 6; si dispongono 22 . ed 1 . 6 in modo che i punti che li centrassegnano si corrispondono in linea verticale, e si ha 23 . 6.

La porzione finale deve trovarsi nella medesima colonna verticale della media.

È necessario avvertire che la corrispondenza tra i limiti delle porzioni iniziali poste nello scompartimento B, e il numero delle colonne verticali delle porzioni medie e finali, è data dal rettangolo posto sull' angolo della squadra, alla intersezione dello scompartimento orizzontale B con le colonne verticali I, II, III, IV.

Nel formare un numero naturale, bisogna sempre mettere insieme tutte le sue parti integranti, in modo che sulle tavole sieno presi le porzioni che più si avvicinino ad esse senza oltrepassarle.

Gli esempi seguenti serviranno a schiarire ciò che precede.

1° Esempio. Formare il numero 2372.

Porzione iniziale =	22 .	2ª linea dello scomparti. B a col. (1)	
media =	4 . 6	3ª linea dello scomparti. C2 e col. II	
finale =	. 42	4ª linea dello scomparti. D2 e col. II	
Somma	2372 = numero proposto.		

2° Esempio. Formare il numero 753.

Porzione iniziale =	75 .	4ª linea dello scomparti. B col. (5)	
media =	0 . 0	superfluo	
finale =	. 30	3ª linea dello scompart. D2 col. IV	
Somma	7530 = numero proposto.		

3° Esempio. Formare il numero 4975.

Porzione iniziale =	48 . .	3ª linea dello scomparti B col. (2)	
media =	1 . 6	4ª linea dello scomparti. C4 col. III	
=	. 12	3ª linea dello scomparti. D4 col. III	
porzioni finali =	. 28	1ª linea dello scomparti. D3 col. III	
=	. 20	2ª linea dello scomparti. D2 col. III	
Somma	497500 = numero proposto.		

È necessario che aggiungiamo alcune osservazioni, le quali servano a completare ciò che riguarda la formazione dei numeri.

Se un numero non si estendesse alno alle porzioni finali delle tavole, basterebbe formarlo con le porzioni iniziali e medie, considerando le finali uguali a zero; il numero 202 si forma per esempio con la sola porzione iniziale 20 e la media 0.2; nel modo stesso se un numero non si estendesse alle porzioni medie della tavola, basterebbero le iniziali considerando le finali e le medie come zero; per esempio si trovano direttamente nella tavola fra le porzioni iniziali i numeri 17, 22, 64.

Quindi siccome le porzioni iniziali per la formazione di un numero possono prendersi in due linee differenti dello scompartimento orizzontale B, si scelgono quelle che conducono al modo di formazione il più pronto; così accade dei multipli di 4 nelle porzioni iniziali compreso fra 50 e 80, i quali si formano più presto incominciando dalla 3ª che dalla 4ª linea orizzontale dello scompartimento B.

Ora indicheremo il posto che occupano nella tavola le diverse porzioni integranti dei logaritmi, le quali corrispondono a ciascuna di quelle dei numeri ai quali i logaritmi appartengono, e che disposte le une sotto le altre a modo che le ultime loro figure decimali si corrispondano in colonna verticale e sommate danno il logaritmo cercato.

Primieramente la prima cifra decimale del logaritmo si trova nello scompartimento orizzontale B, a destra della porzione iniziale, dalla quale è separata da linee verticali. Così 3 è accanto alla porzione iniziale 22 a destra nella colonna (1) seconda linea di B, 8 è accanto a 75 a destra, 6 è accanto a 48 a destra. Per completare la porzione iniziale del logaritmo, si aggiungono alla destra di questa prima cifra le quattro cifre dello scompartimento orizzontale A, le quali si trovano nella stessa colonna verticale o nella stessa linea orizzontale occupate dalla porzione iniziale del numero nello scompartimento B. Così alle porzioni iniziali 22, 75, 48 corrispondono respettivamente le porzioni iniziali logaritmiche

34242, 87506, 68124.

Le porzioni medie logaritmiche si trovano all'incontro della linea orizzontale la quale contiene la porzione media del numero, con la colonna verticale che contiene la porzione iniziale; così essendo la porzione iniziale 22. o la media 1.6, la

porzione media del logaritmo è 3049; e se le porzioni iniziale e media sono 48. e 1.6 la porzione media del logaritmo è 1424.

Se la porzione media del numero è nulla, è nulla ancora la porzione media del logaritmo.

La porzione finale del logaritmo si compone di due parti, una posta nelli scompartimenti D1, D2 D3, immediatamente a destra del numero che si trova alla intersezione della colonna verticale che contiene la porzione iniziale, con la linea orizzontale che contiene la porzione finale del numero del quale si cerca il logaritmo. Così per il numero 2372 la cui porzione iniziale è 22.0 e la finale 0.12, la porzione finale del logaritmo che è 216 si trova immediatamente a destra di 236.

Che se la porzione media del numero del quale cercasi il logaritmo è nulla; l' ultima parte della porzione finale del logaritmo si trova immediatamente all' incontro delle due colonne rammentate. Per esempio 173 è la porzione finale del logaritmo di 753, numero che si decomponeva nella porzione iniziale 75, nella media 0.0 e nella finale 0.30.

La porzione finale del logaritmo deve essere completata da uno resultato di interpolazione. Noi osserveremo, che nello scompartimento orizzontale E, e in ciascuna delle colonne verticali (0) (1) (2) ec. si trovano due serie di numeri di due cifre ciascuna, che presi nell' ordine loro dall' alto in basso, passando da una linea all' altra in colonna verticale, esprimono la differenza fra ciascuna delle porzioni finali della colonna che gli sovrasta, e quelle della colonne accanto a destra che corrispondono loro in linea orizzontale. Così nella colonna (3) i numeri 02, 05, 07, 09, 12, 14, 17 ec. esprimono respettivamente le differenze tra le parti finali 033 031; 067 e 062; 100 e 093; 133 e 124; 166 e 155, 200 e 185; 233 e 216 ec.

Bisogna quindi osservare che una parte della colonna (10) contiene nello scompartimento orizzontale C1 e C2 i numeri decrescenti 0.9 0.8 0.7 che sono i complementi degli indici della media, cioè degli indici 0.1, 0.2, 0.3, che nella colonna verticale I numerano il posto sulla linea verticale delle porzioni medie dello scompartimento C. La porzione della stessa colonna verticale I che è contenuta nello scompartimento D, continue nel medesimo modo gl' indici delle finali. 01, 02, 03, ec.

Ciò posto per completare la porzione finale di un logaritmo, si fa uso della interpolazione nel modo seguente.

Si moltiplica l' indice della porzione finale per il complemento dell' indice della porzione media; si considerano le cifre isolate del prodotto come tanti indici, che denotino il posto delle differenze nello scompartimento E, e nella colonna verticale della porzione iniziale, si riuniscono per addizione le differenze che corrispondono a questi indici, ponendole le une sotto le altre in ordine decimale corrispondente a quello degli indici stessi.

Così nel numero 2372 nel quale 22 1.6 .12 sono le porzioni iniziale, media e finale, l' indice della finale è 6, il complemento dell' indice della media è 2, il prodotto di 6 per 2 è 12. La prima cifra del prodotto indica che bisogna prendere la differenza 03 la quale si trova nella colonna iniziale e nello scompartimento E; e la cifra 2 che è la seconda del prodotto indica che bisogna a 03 aggiungere la seconda differenza 07 che sta al disotto di 03 considerandola come 10 volte più piccola. Il resultato della interpolazione è dunque 03.7; o contentandosi delle sole cifre del 3° ordine decimale 4.

Il quadro particolare di tutte le operazioni relative a due numeri renderà più chiaro tutto ciò che precede.

1° Esempio. *Formare il logaritmo del numero* 2372.

	Numero	Logaritmo	Interpolazione.
Porzioni iniziali =	22	31212	Ind. delle fin. = 6
media =	1.6	3049	Compl. ind. della media = 2
finali =	.12	216	Prodotto 12
Interpolazione		4	Differenza per 1. 0.3
			per 0.2 0.7
Somma	2372	37514	3.7

2° ESEMPIO *Formare il logaritmo del numero* 4975.

	Numero	Logaritmo
Porzioni iniziali	= 48.	68124
medie	= 1.6	1424
finali	= .12	100
	.28	23.3
	.20	1.66
Interpolazione		6.74
Somma	497500	69678,7

Interpolazione

Compl. ind. della media = 6.

Ind. delle fin. $\begin{cases} 3 \times 6 = 18 \\ 7 \times 6 = 42 \\ 5 \times 6 = 30 \end{cases}$

Prodotto 2.250

Differenze

Per 0.2	06.
Per 0.2	0.6
Per 0.05	0.14
Somma	6.74

Si vede adunque che per mezzo delle tavole di Wronschi, e facile trovare i logaritmi di tutti i numeri compresi nei limiti ordinari delle tavole, risultato certamente importantissimo. Tuttavia ci sembra che i calcoli necessarii per determinare il logaritmo di un numero, e il numero corrispondente a un dato logaritmo per mezzo di queste tavole sembreranno troppo lunghi malgrado la loro semplicità, e che l'uso delle tavole logaritmiche ordinarie parrà da preferire.

USO DELLE TAVOLE DEI LOGARITMI DEI NUMERI PRIMI. Onde supplire per quanto potevano permetterlo i limiti di quest'opera alle tavole logaritmiche delle quali abbiamo data la descrizione, abbiamo inserite qui dietro una tavola che contiene i sette primi decimali dei logaritmi di tutti i numeri primi fino a 1979. Per mezzo di questa si può dunque ottenere il logaritmo di ogni numero decomponibile nei fattori primi minori di 1979, e la tavola dei più piccoli divisori dei numeri (vedi pag. 17) potrà servirci per operare questa decomposizione sui numeri citati minori di 5900. Si troverà per esempio

Log. 5723 = log. 59 + log. 97.
Log. 8903 = log. 17 + 2 log. 23.

§ 10. *Fatti diversi relativi all'aritmetica.*

SOLUZIONE DEI PROBLEMI. Le regole per le quattro operazioni fondamentali applicate agli interi, alle frazioni ordinarie e decimali, e ai numeri complessi bastano per risolvere moltissimi problemi di aritmetica.

Non è possibile altro che dare delle indicazioni generali sulla maniera di risolvere le questioni proposte. E non essendo possibile determinare una regola precisa, bisogna incominciare da rendersi ben conto dell'enunciato della questione; esaminare le operazioni che si dovrebbero fare, per verificare il numero cercato, se questo fosse già cognito; finalmente dedurre da queste operazioni altre operazioni più semplici, sintantochè si giunga a far dipendere la determinazione del numero cercato da una o più operazioni fondamentali che si sanno eseguire.

La considerazione dei rapporti e delle proporzioni per quoziente è della maggiore importanza in moltissime questioni d'aritmetica. Poichè in questo caso si tratta di conoscere il quarto termine di una proporzione di cui sono noti li altri tre, si dice che il calcolo di questo termine dipende da una regola del tre.

La regola del tre è semplice quando non si adopra che una sola proporzione; composta quando se ne adoprano più di una; diretta quando i due numeri di una stessa natura nella proporzione variano nel medesimo senso dei numeri corrispondenti; inversa nel caso opposto.

Le regole di interesse, di sconto, di società, di mescolanza, di cambio ec. possono dedursi dalle proporzioni, e dipendono come applicazioni particolari dall'aritmetica sociale. Rimandiamo a questa parte del nostro libro per tutti i particolari relativi alle antiche e nuove misure, alla conversione delle une nelle altre.

PARTICOLARI ISTORICI. L'origine dell'aritmetica si perde nella notte dei tem-

TAVOLA DEI LOGARITMI DEI NUMERI PRIMI FINO A 1979.

NUMERI	LOGARITMI	NUMERI	LOGARITMI	NUMERI	LOGARITMI	NUMERI	LOGARITMI	NUMERI	LOGARITMI	NUMERI	LOGARITMI
1	0000000	229	3599853	541	7331975	853	9309190	1223	0874163	1543	1884899
2	3010300	233	3673539	547	7379973	877	9429886	1229	0893819	1567	1933849
3	4771213	239	3784979	557	7458732	881	9448750	1231	0903561	1601	2043013
5	6989700	241	3820170	563	7505064	883	9458907	1237	0922931	1607	2099133
7	8450980	251	3999787	569	7551133	907	9578336	1249	0969204	1609	2063000
11	0413927	257	4099331	571	7566361	907	9577978	1259	1003457	1613	2079344
13	1139434	263	4199337	577	7611738	911	9595166	1277	1061209	1619	2082698
17	2304489	269	4297223	587	7685281	919	9633193	1279	1065703	1621	2097930
19	2787531	271	4329063	593	7730547	919	9633157	1283	1078267	1627	2113979
23	3617278	277	4424784	599	7774268	937	9717356	1289	1101519	1637	2149467
29	4623980	281	4487982	601	7788744	941	9735800	1291	1109962	1657	2190435
31	4913617	283	4517864	607	7831987	947	9703339	1297	1129408	1663	2209824
37	5682017	293	4669970	613	7876803	953	9780913	1301	1142778	1667	2218359
41	6127839	307	4871393	617	7899851	967	9836123	1303	1148444	1669	2226893
43	6334685	311	4927091	619	7916996	971	9772152	1307	1159756	1693	2286570
47	6720979	313	4955453	631	8000294	977	9894849	1319	1201444	1697	2299014
53	7242759	317	5010321	641	8068596	983	9815533	1321	1209928	1699	2304934
59	7708939	331	5185290	643	8081112	991	9880787	1327	1229798	1709	2327421
61	7853298	337	5276299	647	8109043	997	9956922	1361	1338491	1721	2387959
67	8260748	347	5403293	653	8149137	1009	0038914	1367	1357683	1723	2396935
71	8512548	349	5428854	659	8188856	1013	0060984	1373	1376783	1733	2387860
73	8633229	353	5477547	661	8202913	1019	0091754	1381	1401637	1741	2497996
79	8976271	359	5552544	673	8293131	1021	0098237	1389	1429177	1747	2431629
83	9190781	367	5649991	677	8293697	1031	0132297	1393	1443119	1753	2467813
89	9493900	373	5717958	683	8344907	1033	0141903	1399	1461959	1759	2493958
97	9867717	379	5786232	691	8388780	1039	0199133	1427	1544269	1777	2496474
101	0043214	383	5831958	701	8457180	1049	0237733	1429	1539842	1783	2511313
103	0128379	389	5899630	709	8506603	1051	0219027	1433	1552486	1787	2532246
107	0293838	397	5987693	719	8573781	1061	0257184	1439	1599938	1789	2536193
109	0374265	401	6031444	727	8613264	1063	0268538	1447	1584690	1801	2553187
113	0530784	409	6117333	733	8651060	1069	0299777	1451	1919075	1811	2578185
127	1038037	419	6232160	739	8692444	1087	0392293	1453	1922956	1823	2597807
131	1172713	421	6253851	743	8710388	1091	0378484	1459	1643583	1831	2619883
137	1367206	431	6346773	751	8750893	1093	0399293	1471	1676117	1847	2664909
139	1430148	433	6365979	757	8790958	1097	0492096	1481	1703999	1861	2687646
149	1731363	439	6425043	761	8813947	1103	0432793	1483	1711613	1867	2711443
151	1789769	443	6484087	769	8859263	1109	0448813	1487	1723110	1871	2720736
157	1958997	449	6532483	773	8881793	1117	0490532	1489	1758367	1873	2725376
163	2121876	457	6599101	797	9031747	1123	0505766	1493	1749338	1877	2734063
167	2227165	461	6637003	797	9014383	1129	0529938	1499	1789916	1879	2738408
173	2399401	463	6655919	809	9079594	1151	0613703	1511	1791643	1889	2761340
179	2518330	467	6693169	811	9090309	1153	0619933	1523	1826993	1901	2789831
181	2577797	479	6803565	821	9143821	1163	0655797	1531	1849733	1907	2803537
191	2810334	487	6875190	823	9153899	1171	0685393	1543	1893953	1913	2817130
193	2855573	491	6910813	827	9173085	1181	0721609	1549	1900016	1931	2857923
197	2944092	499	6981093	829	9185545	1187	0744807	1553	1911713	1933	1492819
199	2989531	503	7013680	839	9237629	1193	0796306	1559	1925461	1949	2858118
211	3242825	509	7097178	853	9309480	1201	0799439	1567	1939993	1951	2902378
223	3483019	521	7198377	857	9330854	1213	0838805	1571	1951792	1973	2951771
227	3560259	523	7184017	859	9339031	1217	0838906	1579	1965821	1979	2964458

pi. Ma benchè il nostro sistema di numerazione fosse dai tempi più lontani usitato nell' India, non divenne comune presso di noi che verso la fine del decimo secolo. Sembra secondo i bei lavori di Chasles, che la pratica dell'Abacus si propagasse specialmente per le cure di Gerbero eletto papa nel 999.

Sembra strano che i Greci ed i Romani avendo un vocabolario di numerazione parlata appropriato esattamente al sistema decimale, non debbano avere possedu-

to un sistema di numerazione scritta analogo a quello degli indiani. Così Chasles ha riconosciuto le tracce di questo sistema in un passo molto oscuro di Boezio celebre filosofo del 5° secolo, e forse questo sistema erasi conservato nella scuola Pitagorica. Se Archimede nel suo trattato dell'*Arenario* ha adoprato una notazione differente dalla nostra, forse si deve all'essere questa più appropriata al fine che egli si proponeva; e non si può concluderne che abbia ignorato il valore di posizione delle cifre.

Tuttavia l'aritmetica volgare presso gli antichi ha dovuto essere molto differente da quello che è oggi presso di noi. Non si trova in essi traccia delle operazioni che adoprano i moderni, ed è probabile che queste si facessero tutte a mente piuttosto che con regole fisse.

L'invenzione delle frazioni decimali, che sembra una conseguenza così facile del nostro sistema di numerazione scritta è molto recente. Il Libri l'attribuisce ai Veneziani nel secolo decimoquarto, e Biot riguarda Nepero come inventore della notazione attuale di queste frazioni nel principio del secolo decimosettimo: tuttavia indica la apparente priorità di Pitiscus che pubblicò la sua Trigonometria in questo sistema nel 1612, mentre il *Canon mirificus* di Nepero non venne alla luce che nel 1614.

Ad onta della perfezione dei processi attualmente in uso per eseguire le operazioni dell'aritmetica, si può concludere dai diversi esempi dati precedentemente, e da quelli che si vedranno nel seguito dell'opera che è possibile il progredire in meglio, e che pei calcoli speciali di una stessa natura possono ritrovarsi senza dubbio dei processi più spediti e meno soggetti ad errore delle regole volgari.

BIBLIOGRAFIA ARITMETICA. Non v'è trattato veramente completo di aritmetica, ma vi è un gran numero di opere elementari che si possono seguire e consultare utilmente. Citando tra queste le aritmetiche di Bossut, di Bourdon, di Bolliot, di Clrode, di Lacroix, di Maudnit, di Reynaud diremo che quella di Mauduit contiene delle indicazioni istoriche e dei processi di calcolo interessanti, e quella di Lacroix si distingue per la sua semplicità e brevità.

I Problemi di aritmetica di Saigey e di Ritt offrono dei buoni esercizi di calcolo.

Nelle collezioni accademiche, e nei giornali scientifici si troveranno i documenti più importanti sulla istoria, la filosofia ed il progresso dell'aritmetica dal principio del secolo passato. Basta citare le ammirabili lezioni di Lagrange e di Laplace alla antica scuola normale, le quali sono nelle raccolta dei corsi professati a queste scuole; e sono state poi ristampate a parte nel *Giornale della scuola Politecnica* di cui occupano il volume 7° ed 8°.

II. ALGEBRA

§ 1. *Notazioni e natura delle operazioni dell'Algebra.*

L'ALGEBRA è una scienza che ha per oggetto di ricercare la soluzione più spedita e più generale delle questioni relative alle quantità.

Dopo avere esposte le notazioni algebriche, e mostrata la utilità loro applicandole alla soluzione di un problema, accenneremo meglio la natura delle operazioni algebriche, e l'ordine tenuto in questa seconda parte.

Le notazioni delle quali si fa uso in algebra sono:

1° Le lettere dell'alfabeto che servono a designare i numeri sui quali si deve ragionare. — Si rappresentano per le più le quantità note con le prime lettere dell'alfabeto a, b, c... e A, B, C... e le ignote con le ultime lettere x, y, z, t, u, v. — Le quantità analoghe sono spesse designate dalle stesse lettere con uno e più accenti; così a', a'', a''', a'''', sono delle quantità analoghe ad a; ed x', x'', x''' x'''', sono delle quantità analoghe ad x. Si adoprano spesso a tal uopo anco degli indici 1, 2, 3, nelle x_1, x_2, x_3, ec. che si enunciano x indice uno, x indice due, x indice tre ec.

2° I segni delle quattro prime operazioni dell'aritmetica, cioè:

$+$ per l'addizione $a + b$ (a più b).

$-$ per la sottrazione $a - b$ (a meno b).

$\times$ per la moltiplicazione $a \times b$ (a moltiplicato per b).

Si può ancora scrivere $a.b$ o semplicemente ab senza interporre alcun segno tra le lettere. Ma l'interposizione del segno è sempre necessaria per i numeri perchè non si confonda per esempio il prodotto di 2 per 4, 2×4 che è 8, col numero 24 che è tre volte più grande.

$:$ Per la divisione $a : b$ o $\frac{a}{b}$ (a diviso per b): la seconda notazione è adoprata più spesso.

3° I *coefficienti;* scrivendo $5a$ invece di $a + a + a + a + a$, il numero 5 chiamasi *coefficiente*, ed indica che la quantità rappresentata da a è ripetuta cinque volte.

4° L'*esponente* (o grado della potenza alla quale si innalza una quantità); così si pone a^5 invece di $aaaaa$, e il numero 5 posto in alto della quantità a indica che si prende il prodotto di 5 fattori uguali ad a.

Il segno radicale $\sqrt{\ }$ indica una estrazione di radice, $\sqrt[7]{a^3 b^4 c}$ rappresenta la radice settima della qualità $a^3 b^2 c$.

6° Il segno di uguaglianza $a = b$ (a uguale a b.

7° Il segno di disuguaglianza $>$ che volge la punta verso la quantità più piccola. Così $a > b$ indica a maggiore di b, ed $a < b$ indica a minore di b.

Per apprendere l'utilità dei segni algebrici, basta applicarli alla soluzione delle questioni anco semplici; si vede allora come essi abbreviano e generalizzano i ragionamenti che dovrebbero farsi esplicitamente, per arrivare alla determinazione delle incognite, se non si adoprassero questi segni. L'esempio riportato qui sotto è tratto dall'Algebra di Lacroix.

PROBLEMA

Dividere un numero in tre parti tali, che la più grande differisca dalla media di un numero dato, e la media della più piccola di un altro numero dato.

SOLUZIONE

Per mezzo del discorso ordinario.	*Per mezzo delle notazioni algebriche.*
	Sia il numero da dividere . . . a
	La differenza tra la parte più grande e la media sia . . . . . b
	La differenza tra la media e la più piccola sia. c
	La più piccola si chiami . . . x
La parte media si otterrà aggiungendo alla più piccola la differenza tra la media e la più piccola.	La media sarà $x + c$.
La più grande sarà la media più la differenza tra la più grande e la media.	La più grande sarà $x + c + b$.
Le tre parti riunite danno il numero proposto; dunque la più piccola, aggiuntovi la più piccola più la differenza tra questa e la media; aggiuntovi ancora la più piccola, più la differenza tra questa e la media, più la differenza tra la media e la più grande uguaglieranno il numero proposto.	e sarà $x + x + c + x + c + b = a$

Dunque tre volte la più piccola, più due volte la differenza fra questa e la media, più la differenza tra la media e la più grande saranno uguali al numero dato.

ossia $3x + 2c + b = a.$

Dunque la parte più piccola ripetuta tre volte, sarà eguale a ciò che resta del numero dato toltavi la differenza tra la più piccola e la media due volte, e la differenza tra la media e la più grande una volta.

$3x = a - 2c - b.$

Finalmente la parte più piccola sarà uguale al terzo di ciò che resta del numero dato, quando da esso è stata tolta due volte la differenza tra la più piccola e la media e una volta la differenza tra la media e la più grande.

$$x = \frac{a - 2c - b.}{3}$$

Io questo esempio si sono dovute trattare diverse *equazioni*, ossia diversi casi di uguaglianza di due sistemi di quantità i quali erano separati dal segno = e contenevano delle quantità incognite; si sono dovute trasformare queste equazioni deducendo le une dalle altre, ed eseguire alcune operazioni fondamentali come l'addizione, la sottrazione ec. per arrivare a determinare la quantità incognita. È dunque necessario di trattare le quattro regole per le quantità algebriche, quindi venire a ciò che concerne la risoluzione delle equazioni, e lo studio delle proprietà generali delle funzioni algebriche. Abbiamo in questa pubblicazione data la risoluzione delle equazioni *determinate* del primo e secondo grado, alcune proprietà dei numeri, e la risoluzione delle equazioni *indeterminate* di primo grado. Per ciò che riguarda le equazioni dei gradi superiori non abbiamo trascurato, per quanto lo permettevano i limiti di quest'opera, la teoria delle funzioni intere, le derivate, le funzioni simmetriche, l'uso loro nella eliminazione, i teoremi più importanti che riguardano la risoluzione algebrica o numerica delle equazioni, e l'espressione delle radici loro l'una in funzione dell'altra.

§ 2. *Le quattro regole; modo di operare sulle quantità algebriche.*

L'ADDIZIONE ALGEBRICA si fa scrivendo le une dopo le altre coi loro segni le quantità da aggiungere. Si chiamano termini simili quelli composti delle stesse lettere affette dalli stessi esponenti. Questi si riducono operando convenientemente sui coefficienti. *Monomio* è una espressione composta di un sol termine; *polinomio* contiene un numero di termini qualunque; prende il nome di *binomio*, *trinomio*, *quadrinomio*, se contiene due, tre, quattro termini.

LA SOTTRAZIONE ALGEBRICA si fa scrivendo tutti i termini delle quantità che debbono essere sottratti, con segni opposti a quelli che avevano, accanto ai termini della quantità sulla quale debba farsi la sottrazione.

1° Esempio. L'addizione dei monomi $3a$, $5b$ e $2c$ da $3a + 5b + 2c$.

2° Esempio. L'addizione dei monomi $4a^2b^3$, $2a^2b^3$, $7a^2b^3$ da per resultato $13a^2b^3$.

3° Esempio. L'addizione dei polinomi $3a^2 - 4ab$, $2a^2 - 3ab + b^2$, $2ab - 5b^2$ da, fatta la riduzione dei termini simili, $5a^2 - 5ab - 4b^2$.

4° Esempio. Il residuo che si ottiene sottraendo $4b$ da $5a$, è $5a - 4b$.

5° Esempio. Il residuo che si ottiene togliendo $2b - 3c$ dalla quantità $4a$ è $4a - 2b + 3c$, l'operazione si indica così

$$4a - (2b - 3c) = 4a - 2b + 3c$$

Le parentesi che racchiude $2b - 3c$, indica che la sottrazione si opera sopra la intera quantità contenuta dentro la parentesi.

6° Esempio. Il resto che si ottiene togliendo

$5a^2 - 4ab + 3bc - b^2$ da $8a^2 - 2ab$ è $8a^2 - 2ab - 5a^2 + 4ab - 3bc + b^2$ e facendo la riduzione dei termini simili esso diviene

$$3a^2 + 2ab - 3bc + b^2.$$

Moltiplicazione algebrica. La più semplice moltiplicazione è quella dei monomi, si effettua avendo riguardo a quattro regole distinte che sono le seguenti:

1ª La regola dei segni. Il prodotto di due monomi affetti dal medesimo segno ha il segno +. Il prodotto di due monomi affetti da segni contrari ha il segno —.

2ª La regola dei coefficienti. Il coefficiente del prodotto, è uguale al prodotto dei coefficienti dei fattori.

3ª La regola degli esponenti. L'esponente di una lettera in un prodotto, è uguale alla somma degli esponenti di questa lettera nei fattori. Se la lettera non ha esponente vi è sottintesa l'unità.

4ª Regola delle lettere. Se una lettera è contenuta in uno solo dei fattori, entra nel prodotto, e conserva lo stesso esponente.

Applicando queste regole agli esempi seguenti si avrà

$$8a^2bc^3 \times 7abd^3 = 56a^3b^3c^3d^3,$$
$$-21a^3b^3cd \times 8abc^3 = -168a^4b^4c^4d,$$
$$-4abc \times -7df = 28abcdf.$$

Per moltiplicare l'uno per l'altro due polinomi, bisogna moltiplicare successivamente tutti i termini del moltiplicando per ciascuno dei termini del moltiplicatore; tenendo conto in ciascuno dei prodotti parziali delle quattro regole date per la moltiplicazione dei monomi; e fare quindi la riduzione dei termini simili se occorre.

È bene il disporre i due fattori in modo che tutti i termini siano ordinati per rapporto alle potenze crescenti e decrescenti di una stessa lettera; allora il primo o l'ultimo termine del prodotto sono irriduttibili.

Riportiamo un tipo di questa operazione coll'esempio sottoposto. I due fattori sono ordinati rapporto alle potenze decrescenti di a, e col tempo stesso rapporto alle potenze crescenti di b.

Moltiplicando	$4a^3 - 5a^2b - 8ab^2 + 2b^3.$
Moltiplicatore	$2a^2 - 3ab - 4b^2.$
1° prodotto parziale	$8a^5 - 10a^4b - 16a^3b^2 + 4a^2b^3.$
2° prodotto parziale	$-12a^4b + 15a^3b^2 + 24a^2b^3 - 6ab^4.$
3° prodotto parziale	$-16a^3b^2 + 20a^2b^3 + 32ab^4 - 8b^5.$
Prodotto totale	$8a^5 - 22a^4b - 17a^3b^2 + 48a^2b^3 + 26ab^4 - 8b^5.$

Divisione algebrica. Perciò che riguarda i monomi è necessario osservare quattro regole corrispondenti a quelle della moltiplicazione.

1ª Il segno del quoziente è + se il dividendo e il divisore hanno lo stesso segno, ed è — se sono di segni contrari.

2ª Il coefficiente del quoziente si ottiene dividendo il coefficiente del dividendo per quello del divisore.

3ª L'esponente di una lettera nel quoziente si ottiene prendendo la differenza tra l'esponente di questa lettera nel divisore, e l'esponente della medesima nel dividendo.

4ª Tutte le lettere che sono nel dividendo senza essere nel divisore, rimangono inalterate nel numeratore del quoziente; tutte quelle che si trovano nel divisore senza entrare nel dividendo, pas-

Digitized by Google

sano nel denominatore del quoziente. Applicando queste regole si avrà

$$\frac{48a^3b^2c^2d}{12ab^2c} = 4a^2bcd$$

$$\frac{-150a^3b^4cd^2}{30a^3b^5d} = -5a^2b^3cd$$

$$\frac{-12a^4b^2cd}{-8a^2bc^2} = \frac{3a^2bd}{2c}$$

In questo ultimo esempio l' esponente 2 della lettera c nel divisore sorpassando di un unità l' esponente 1 della medesima lettera nel dividendo, avremmo seguendo la regola degli esponenti potuto scrivere c nel numeratore con esponente -1, ed il quoziente sarebbe stato allora

$$\frac{3}{2}a^2bc^{-1}d.$$

In generale $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

questa notazione degli esponenti negativi è utile in molti casi: così la regola degli esponenti da pure

$$\frac{a^m}{a^m} = a^0 = 1.$$

Per dividere due polinomi l'uno per l'altro si ordinano per rapporto alle potenze crescenti e decrescenti della stessa lettera; si divide il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore, e così si ottiene il primo termine del quoziente; quindi si toglie dal dividendo il prodotto del divisore per il primo termine ottenute, ciò fatto si ricomincia sul primo termine del resto l'operazione precedente, la quale si prosegue sino a che si giunga ad un resto zero, o ad un resto il cui primo termine non sia divisibile per il primo del divisore, avuto riguardo alla lettera ordinatrice.

Poniamo innanzi nella tavola seguente un tipo del calcoli di una divisione algebrica, che può farsi esattamente

Dividendo	Divisore
$10a^5 - 48a^3b + 51a^2b^3 + 4ab^4 - 15b^5$	$-5a^3 + 4ab + 3b^2$
$-10a^5 + 8a^3b + 6a^2b^3$	Quoziente $-2a^2 + 8ab - 5b^3$
$-40a^3b + 57a^2b^3 + 4ab^4 - 15b^5$	
$+40a^3b - 32a^2b^3 - 24ab^4$	
$+25a^2b^3 - 20ab^4 - 15b^5$	
$-25a^2b^3 + 20ab^4 + 15b^5$	

Quando non si arriva ad un resto zero, si può sviluppare il quoziente in una serie di un numero infinito di termini; così si troverà

$$\frac{x}{x-a} = 1 + \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3} + \text{ec.}$$

e adoprando la notazione degli esponenti negativi

$$\frac{x}{x-a} = 1 + ax^{-1} + a^2x^{-2} + a^3x^{-3} + a^4x^{-4} + \text{ec.}$$

§ 3. *Risoluzione delle equazioni di primo grado.*

NOZIONI PRELIMINARI SULLE EQUAZIONI IN GENERALE. Risolvere le equazioni è trovare il valore delle incognite che sodisfano alle equazioni date. La risoluzione delle equazioni in generale è il problema più elevato dell'algebra.

Un eguaglianza diviene un identità, quando due membri dell' equazione separati dal segno di uguaglianza divengono uguali indipendentemente dai valori particolari attribuiti alle lettere che compongono questi due membri. Tali sono le uguaglianze.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Ogni equazione deve divenire una identità, quando invece delle incognite si sostituiscono ad esse i loro valori.

Una equazione è numerica quando non vi è che il valore delle incognite rappresentato da lettere, è algebrica quando vi entrano delle lettere anco per rappresentare le quantità cognite.

Per risolvere le equazioni è spesso necessario far subire loro delle trasformazioni, tra le quali rammentiamo le più semplici.

1° Si può far passare un termine qualunque dall'un all'altro membro dell'equazione cambiandogli segno.

2° Si possono moltiplicare o dividere i due membri di una equazione per lo stesso numero. Con questo mezzo si fanno sparire i denominatori dai termini di una equazione, riducendoli tutti ad un denominatore comune, e quindi sopprimendo questo denominatore.

Si semplifica un equazione anco dividendo tutti i termini per il loro massimo comune divisore.

Quando una equazione è stata in tal modo semplificata, si giudica il grado dell'equazione dalla somma degli esponenti delle incognite in quel termine in cui questa somma è la maggiore per rispetto agli altri della equazione proposta.

L'equazione $5x - 3y = 4z + 1$ è di primo grado, perchè in nessun termine la somma degli esponenti delle incognite, x, y, z supera l'unità.

L'equazione

$$ax^3 - 2bx^2y + abz^3 = by^3$$

è del 4° grado, perchè nel secondo termine la somma degli esponenti delle incognite è $2 + 1 + 1$. Inoltre questa equazione è omogenea, cioè tale chè la somma degli esponenti delle quantità cognite e incognite che entrano nella equazione è uguale in tutti i termini a 4.

Quando una sola equazione contiene più incognite, serve a determinare il valore di una di queste, quando siano dati a tutte le altre dei valori arbitrari; così tutte le incognite fuori che una possono ricevere quali valori si vogliano.

Che se il numero delle equazioni è uguale al numero delle incognite, i valori di queste sono allora interamente determinati, e formano un sistema corrispondente al sistema di equazioni proposto. Quando il numero delle equazioni sorpassa il numero delle incognite, per esempio di m unità; il sistema proposto non può ricevere soluzione, se le costanti che entrano in queste equazioni non son legate fra loro da un numero m di equazioni di condizione.

§ 4. *Risoluzione delle equazioni di primo grado ad una sola incognita.*

Coll'effettuare le trasformazioni precedenti ogni equazione di primo grado ad una sola incognita si riduce alla forma

$$ax = b$$

dove a e b sono quantità costanti; da questa si ottiene

$$x = \frac{b}{a}$$

Questo valore di x rappresenta le operazioni da farsi per ottenere l'incognita che si cerca e si dice una formula.

RISOLUZIONE GENERALE DELLE EQUAZIONI DI PRIMO GRADO A PIÙ INCOGNITE. Un sistema di due equazioni di primo grado a due incognite può sempre ricondursi alla forma

$$ax + by = c. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$a'x + b'y = c'. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

e si risolve con diversi metodi.

1° Per *confronto*; si toglie da ciascuna delle equazioni il valore della stessa incognita, per esempio il valore di x come se y fosse noto, e si uguagliano i due valori trovati; così si ha una equazione la quale non contiene altro che y. Questa ci da allora il valore di y; e quello di x, si può avere collo stesso metodo.

2° Per *sostituzione*; si sostituisce nella seconda equazione il valore di x avuto dalla prima; e si ottiene sempre una sola equazione con la sola incognita y.

3° Per *sottrazione*, si moltiplicano per a' i due membri della prima equazione, e per a i due membri della seconda serbando ad a ed a' il loro segno, quindi si toglie la seconda delle equazioni ottenute dalla prima, allora x sparisce e rimane un'equazione che contiene solamente y.

Questa operazione per la quale si fanno sparire una o più incognite da un sistema di equazioni proposte, si chiama eliminazione.

Qualunque sia il processo di eliminazione seguito, i valori di x e di y tratti dalle equazioni (1) e (2) sono

$$x = \frac{eb' - be'}{ab' - ba'} \qquad y = \frac{ac' - ea'}{ab' - ba'}$$

Per risolvere le tre equazioni di primo grado a tre incognite

$$\left.\begin{array}{l} a\,x + b\,y + c\,z = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{array}\right\} (3)$$

per mezzo di uno dei tre metodi precedenti si elimina una delle incognite 1° tra la prima equazione e la seconda, e quindi tra la seconda e la terza; si otterranno così due equazioni a due incognite, tra le quali eliminandone una ci ridurremo ad una equazione simile di primo grado ad una sola incognita. Trovato il valore di questa si risalirà facilmente al valore delle altre per delle sostituzioni successive.

Qualunque sia il metodo di eliminazione seguito per il sistema delle equazioni (3) i valori delle incognite saranno

$$x = \frac{N}{D}, \; y = \frac{N'}{D}, \; z = \frac{N''}{D}$$

nei quali s'ha

$$\begin{aligned} D &= ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' \\ &\quad + bc'a'' - cb'a'' \\ N &= db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' \\ &\quad + bc'd'' - cb'd'' \\ N' &= ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' \\ &\quad + dc'a'' - cd'a'' \\ N'' &= ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' \\ &\quad + bd'a'' - db'a'' \end{aligned}$$

Si vede che per le equazioni ad una sola incognita il numero dei termini del numeratore e del denominatore è rappresentato da 1.

Per le equazioni a due incognite questo numero è 2 ossia 2 . 1.

Per le equazioni a tre incognite è 6 ossia 3 . 2 . 1.

Per le equazioni a 4 incognite questo numero sarebbe 4 . 3 . 2 . 1 cioè 24, o per le equazioni a cinque incognite 5 . 4 . 3 . 2 . 1 ossia 120.

Se le incognite sono due, questo denominatore che abbiamo veduto essere $ab' - ba'$ si forma prendendo i coefficienti a e b, formando le permutazioni ab, ba separandole col segno — e ponendo un accento all'ultima lettera di ciascuna delle permutazioni. Il numeratore di ciascuna delle incognite x ed y si ottiene, sostituendo la quantità costante c in luogo del coefficiente a o del coefficiente b dell'incognita che si vuol determinare, e lasciando stare gli accenti.

Sostituendo c invece di a in ab' e c' invece di a' in ba' si ottiene $cb' - bc'$, che è il numeratore per la x.

Nel caso di tre equazioni a tre incognite si introduce successivamente la lettera c a dritta, nel mezzo ed a sinistra in ciascuna delle permutazioni ab e ba, e si ottengono abc, acb, cab, bac, bca, cba sei permutazioni, si pongono le une dopo le altre, si separano coi segni — e + mettendo un accento alla seconda lettera e due alla terza. Così si ottiene il denominatore D. Il numeratore di ciascuna delle incognite si ha, ponendo in luogo delle incognite la quantità costante che rappresenta il secondo membro delle equazioni proposte, e lasciando stare gli accenti. La legge di formazione è la stessa anco quando le incognite sono più di tre.

§ 8. *Equazioni del secondo grado.*

RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE A DUE TERMINI. La più semplice equazione di secondo grado ad una sola incognita, è quella che non contiene la prima potenza dell'incognita, e può mettersi sotto la forma

$$ax^2 = b$$

onde $$x^2 = \frac{b}{a}$$

ed $$x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}} \qquad (1)$$

Si pone il doppio segno $\pm$ (più o meno) perchè il quadrato $\frac{b}{a}$ può provenire ugualmente da una radice negativa

$$-\sqrt{\frac{b}{a}}$$

che da una radice positiva

$$+\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Risoluzione della equazione completa. Uo equazione completa di aecondo grado si può ridorre alla forma

$$x^2 + px + q = o$$

dove p e q sono quantità oognite intere o frazionarie, positive o oegative.

Le due *radici* ossia i due valori della incognita si pongono sotto la forma

$$x = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right),$$

ovvero

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \ldots (2)$$

facile ad enunciarsi nel linguaggio ordinario dell' algebra.

Quando nella equazione primitiva si volessero conservare soltaoto dei coefficienti intieri bisognerebbe porla sotto la forma

$$ax^2 + bx + c = o$$

e le radici avrebbero la forma più generale

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3)$$

La soluzione delle equazioni di secondo grado ci conduce a considerare le quantità imaginarie, le quali non hanno che ona esistenza simbolica, o differiscono esenzialmente dalle quantità reali.

Se nei valori (1) (2) (3) le quantità

$$\frac{b}{a}, \frac{p^2}{4} - q, b^2 - 4ac \text{ sono negativi,}$$

le radici della equazione sono imaginarie. Allora nissun valore reale positivo o negativo posto in luogo delio incognite può sodisfare a queste equazioni.

Le radici imaginario di uo equazione di secondo grado possooo metterai sotto la forma

$$a \pm b\sqrt{-1},$$

nella qualo a e b sono quantità reali.

Radice quadrata delle quantita' algebriche. La soluzione delle equazioni di secondo grado richiede che si sappia estrarre la radice quadrata dalle quantità algebriche.

La radice quadrata di un monomio si estrae, prendendo la radice quadrata del coefficieote numerico, e dividendo per 2 l' esponente di ciascuna lettera di questo monomio. Quando questa operazione non può eseguirsi esattameote, si accenna acrbando la quantità proposta tutta o parte sotto il aegno $\sqrt{\ }$ o si ottiene un *radicale di secondo grado*.

Due radicali si dicono *simili*, quando non differiscono tra loro che per le quantità che moltiplicano la parte oompresa sotto il aegno radicale. Tali sono

$$5a\sqrt{2ab} \text{ e } 3(c+d)\sqrt{2ab}.$$

Per combinare per via di addizioae o di aottrazione i radicali aimili, basta eseguire queste operazioni sulle quantità che moltiplicano il radicale, e porre questo come fattore comune del resultato: la somma dei due radicali precedenti sarà

$$\sqrt{2ab}\left(5a + 3(c+d)\right)$$

Per ottenere il prodotto o il quoziente di due radicali di aecondo grado, si fa il prodotto o il quoziente delle quantità comprese sotto il aegno radicale, e si ricopre questo prodotto o quoziente col segno $\sqrt{\ }$: cosl

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \text{ e } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Si tolgono di sotto al aegno radicale i fattori che sono dei quadrati perfetti, poaendo invece le radici di questi quadrati come fattori avaoti al segno radicale, che ricopre le quantità le quali non son quadrati perfetti.

$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{ab}$$

Per fare entrare un fattore sotto al aegno radicale bisogna toalzare questo fattore al quadrato.

$$2ac\sqrt{ab} = \sqrt{4a^2c^2b}$$

Il procosso per estrarre la radice quadrata da un polinomio, si deduce dalla legge colla quale si forma il quadrato di un polinomio composto di un numero qualunque di termioi. E componendosi questo del quadrato del primo termine, del doppio prodotto del primo termioe per il

secondo, del quadrato del secondo, del doppio prodotto del primo e del secondo per il terzo, del quadrato del terzo, del doppio prodotto del primo, secondo e terzo per il quarto, e così seguitando; ne segue che per estrarre la radice quadrata da un polinomio, dopo averle ordinate per le potenze ascendenti o discendenti di una lettera, dovremo cominciare da estrarre la radice del primo termine, e così otterremo il primo termine della radice cercata; quindi soppresso il primo termine del polinomio, dividere per il doppio del primo termine trovato della radice il primo termine del resto, così avremo il secondo termine della radice. Sottraendo dal primo resto il doppio del prodotto del primo termine della radice per il secondo, e il quadrato del secondo termine, otterremo un secondo resto; sul quale ripeteremo l'operazione, dividendo il primo termine di questo secondo resto per il doppio del primo termine della radice, il che darà il terzo termine di questa, e sottraendo dal secondo resto il doppio del prodotto del primo e del secondo termine per il terzo, e il quadrato del terzo termine, per ottenere un terzo resto, sul quale continueremo l'operazione di mano in mano.

L'estrazione di radice da un polinomio che non è un quadrato perfetto, conduce come la divisione a delle serie di un numero infinito di termini. Così adoprando la notazione degli esponenti negativi, l'estrazione di radice dal binomio $b^2 - 4ac$, che non può essere un quadrato perfetto, da la serie

$$b - 2acb^{-1} - 2a^2c^2b^{-3} - 4a^3c^3b^{-5} - \text{ec.}$$

Quando si deve estrarre la radice da una espressione della forma $a + \sqrt{b}$ si suole adoprare la formola

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

la quale da una notabile semplificazione se $a^2 - b$ è un quadrato perfetto.

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO A PIU' INCOGNITE. Considerando soltanto il sistema di due equazioni a due incognite; se una di queste equazioni è di primo grado, se ne caverà il valore di una delle incognite, e sostituendo questo valore nell'altra equazione, essa diverrà di secondo grado ad un incognita sola, e per conseguenza potrà risolversi facilmente.

Se una delle equazioni è di primo grado rapporto soltanto ad una delle incognite, se ne trae il valore di questa incognita il quale sostituito nell'altra equazione da una equazione di terzo grado.

Finalmente l'eliminazione di una delle incognite tra due equazioni complete di secondo grado conduce ad una equazione del quarto.

§ 6. *Diverse applicazioni delle notazioni algebriche.*

L'uso dei segni e delle notazioni algebriche facilita considerabilmente la scoperta delle proprietà dei numeri. Questi segni e queste notazioni applicate ai fatti che abbiamo annunciate in aritmetica riguardo alla divisibilità, alle frazioni decimali, alle proporzioni, alle progressioni, ai logaritmi, bastano per generalizzarli e per mostrare come sieno essi applicabili ai sistemi di numerazione differenti del sistema decimale.

FRAZIONI CONTINUE. Sono queste espressioni della forma

$$a + \frac{B}{b} + \frac{C}{c} + \frac{D}{d} + \text{ec.}$$

ma ordinariamente non si considerano che le frazioni continue che hanno i numeratori B, C, D, ec. uguali all'unità, e prendono allora la forma

$$a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

a, b, c, d, sono i quozienti incompleti.

Il primo ad immaginarle fu Milord Brouncker, ma le proprietà loro e i loro vantaggi sono stati scoperti principalmente da Huygens.

Per ridurre una frazione ordinaria per esempio $\frac{1103}{887}$ in frazione continua, basta operare come per la ricerca del massimo comune divisore tra i due termini; i quozienti successivi sono 1, 4, 9, 2, 1, 1, 4, e la frazione continua che ne deriva si scrive come segue

$$\frac{1103}{887} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4}.$$

Per tornare dalla frazione continua a quella che ha servito a formarla, si prendono le quantità consecutive

$$1,\ 1 + \frac{1}{4},\ 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9},\ \text{ec.}$$

e riducendo

$$1, \frac{5}{4},\ \frac{46}{37},\ \text{ec.}$$

Queste si chiamano le ridotte.

Conosciute due ridotte consecutive $\frac{M}{N}$ e $\frac{P}{Q}$ la ridotta seguente $\frac{R}{S}$ che corrisponde al quoziente incompleto r si ottiene per mezzo della formula

$$\frac{R}{S} = \frac{Pr + M}{Qr + N}$$

Il valore vero di una frazione continua è sempre compreso tra due ridotte consecutive, le quali sono alternativamente l'una più piccola l'altra più grande di questo valore, incominciando dalla prima.

Le ridotte sono irriduttibili.

La differenza tra due ridotte consecutive ha per numeratore l'unità, per denominatore il prodotto dei denominatori delle ridotte. L'errore che si commette ponendo invece del valore della frazione quello di una ridotta è dunque minore di questa differenza.

Una ridotta $\frac{P}{Q}$ esprime il valore della frazione continua più esattamente di ogni frazione il cui denominatore fosse più piccolo di Q.

Huygens dovendo stabilire dei sistemi di ruote dentate in dimensioni determinate dagli elementi del sistema solare, i cui rapporti erano espressi da numeri molto grandi, nè volendo moltiplicare di troppo il numero dei denti per costruire il suo automa planetario, cercò di semplificare questi rapporti e si servì perciò delle frazioni continue. La proprietà delle ridotte gli indicava il grado di approssimazione che otteneva.

Ogni frazione continua periodica esprime una delle radici di un equazione di secondo grado.

Evaristo Galois, giovane geometra dei più gran merito tolto alla scienza nel 1833 da un fine tragico e prematuro, aveva trovato nel 1829, quando non era ancora che studente di matematica, alcune proposizioni molto eleganti su questo soggetto. Egli ha dimostrato che ac nna delle radici di nna equazione di secondo grado è una frazione continua immediatamente periodica, si ottiene l'altra radice dividendo l'nnità negativa per la frazione continua periodica rovesciata. Così i valori di

$$x = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \ldots$$

e di

$$x = -\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

sono necessariamente radici di una stessa equazione di secondo grado, la quale è di fatto

$$3x^2 - 8x - 7 = 0$$

Galois ha dimostrato pure che in questo caso è necessario che una delle radici sia maggiore dell'unità, e che l'altra sia compresa tra 0 e -1; e reciprocamente che tutte le vnite che le due radici sono comprese fra questi limiti, ha luogo la proprietà accennata.

Eulero, Lagrange, uno dei Bernoulli, e il sig Wronski hanno molto coltivata la teoria delle frazioni continue.

Frazioni di Lambert. Lambert uno dei più distinti geometri del secolo passato, nipote di uno dei Francesi che espatriarono dopo la revoca dell'editto di Nantes, è stato il primo a proporre una specie di frazioni poco note, che hanno la pro-

prietà di formare delle serie più convergenti di ogni serie geometrica: tali cioè che in una serie di termini decrescenti secondo una progressione geometrica, ninno tra quelli corrispondente ad uno della prima serie sia più vicino di quello ad ue dato valore.

Anco Lagrange si è occupato di queste frazioni nel 5° fascicolo del giornale della scuola politecnica, riannodandole alle frazioni continue.

Prendiamo per darne ue idea la frazione $\frac{887}{1103}$. Dividiamo prima 1103 pur 887 ed avremo un quoziente 1 ed un reste 216; quindi 1103 per 216 ed avremn un quoziente 5 ed un resto 23, e cesi seguitando a dividere 1103 per i resti succesaivi avremo i quozienti

1, 5, 47, 50, 367, 551, 1103,

e per resti

216, 23, 22, 3, 2, 1.

Si ponga allora

$$\frac{887}{1103} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5.47} - \frac{1}{5.47.50} + \frac{1}{5.47.50.367} - \frac{1}{5.45.50.367.551} + \frac{1}{5.47.50.367.551.1103.}$$

Se si opera nel mode atesso sulla frazione

$$\frac{1415926535897932384626433}{10000000000000000000000000}$$

che aggiunta al numero intere 3 esprime il rapporto π della circonferenza al diametro (V. GEOMETRIA) avreme

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7.113} - \frac{1}{7.113.4739}.\text{ec.}$$

dove le divisioni sono state eseguite in modo che ogni resto fosse minore della metà del precedente.

I due primi termini danno il rapporto di Archimede $\frac{22}{7}$, i primi tre quelle di Adriano Mezie $\frac{355}{113}$.

PROGRESSIONI PER DIFFERENZA E PER QUOZIENTE. Siano a ed A i primi termini di due progressioni l'una per differenza e l'altra per quoziente; n ed N gli ultimi termini innanzi ai quali stanno altri $m-1$ termini; siano r ed R la differenza ed il queziente costanti: a ed S la somma di tutti i termini delle due progreasioni; P il prodotto di tutti i termini della progresaione geometrica; si avranno le formule

$$r = \frac{n-a}{m-1},\quad R = \sqrt[m-1]{\frac{N}{A}}$$

$$a = \frac{1}{2}(a+n)\,m,\quad P = \sqrt{A^m N^m}$$

$$S = \frac{NR - A}{R-1} = \frac{A(R^m - 1)}{R-1},$$

l'ispezione delle quali mette in evidenza le analogie segnalate tra le operazioni relative alle due specie di progressioni (V. ARITMETICA pag 33).

Le due equazioni relative alle progresaioni per differenza serveno a determinare due delle cieque quantità a, n, m, r, s, quando sono conosciute le altre tre. Le tre equazioni relative alle progresaioni per queziente serveno a determinare 3 delle quaotità A, N, m, R, S, P quando sono conosciute le altre 3, e danne luogo a 20 problemi differenti.

ESPONENZIALI E LOGARITMI. Fra queati prebiemi quelli nei quali è incoguita m conducono a delle equazieni della ferma $a^x = b$ alle quali si da il neme di *esponenziali*; a e b sono quantità cognite.

Per risolvere l'equazione $a^x = b$ si prendono le potenze successive di a e si trova b compreso tra la potenza a^n ed $a^n + 1$; ponendo $\frac{b}{a^n} = c$ ed eperando nel mode stesse sull'equaziene $c^{x'} = a$, si avrà a compresa tra $c^{n'}$ e $c^{n'+1}$ per cui $b = a^{n+\frac{1}{x'}}$ ed x' compreso tra n' ed $n'+1$.

Seguitando nel modo medesimo si otterrà x in ferma di frazione continua, cioè

$$x = n + \cfrac{1}{n' + \cfrac{1}{n'' + \cfrac{1}{n''' + \text{ec.}}}}$$

Se si suppone che nella equaziene

$$a^x = y$$

Per riconoscere se un numero è poligono basta moltiplicare questo per il numero 8 $(m-2)$ e aggiungere al prodotto il quadrato $(m-4)^2$. Dovrà questa somma divenire un quadrato perfetto a^2 se il numero proposto sia poligono della specie contemplata, e la formula

$$\frac{a+m-4}{2(m-2)} = n$$

darà il lato n al quale corrisponde il poligono.

NUMERI FIGURATI. Alcuni autori confondono a torto i numeri poligoni dei quali abbiamo parlato, derivati da progressioni aritmetiche differenti, coi numeri *figurati* i quali formano delle serie derivate dalla stessa progressione aritmetica.

Come dal prendere uno due tre ec. termini della prima progressione

$$\div 1.2.3.4.5.6.7. \quad (1)$$

si ottengono i termini della serie

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, \text{ec.}$$

così dal sommare uno, due, tre, ec. termini di questa, si ottengono i termini della serie

$$1, 4, 10, 20, 35, 56, \text{ec.}$$

che è quella dei numeri piramidali; e così seguitando si ottengono tutti i numeri figurati del primo ordine dalla prima progressione (1).

I numeri figurati di secondo ordine derivano tutti nel modo stesso dalla seconda progressione

$$\div 1.3.5.7.9.11.13.15.$$

e sono

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49,$$
$$1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, \text{ec.}$$

I numeri figurati dell'ordine m derivano dalla progressione

$$\div 1.1+m.1+2m.1+3m.1+4m.$$

La somma dei numeri piramidali dell'ordine $m-2$ si ottiene dalla formula

$$\frac{n^3(m-2)^2+3n^2-n(m-5)}{6}$$

la quale ponendovi $m-2=4$ diviene

$$\frac{n^3+3n^2+2n}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3.}$$

e ponendovi $m-2=2$ diviene

$$\frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3.}$$

TRIANGOLO ARITMETICO DI PASCAL. Questa figura dovuta al genio di Pascal merita di esser notata per alcune proprietà singolari.

Le case della prima striscia orizzontale contengono tutte l'unità; nelle striscie seguenti i numeri contenuti in ciascuna casa si formano coll'aggiungere il numero della casa vicina a sinistra, a quello della casa immediatamente superiore. Il primo numero di ogni striscia è l'unità, e ciascuna si sposta di una casa verso destra.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		1	3	6	10	15	21	28	36
			1	4	10	20	35	56	84
				1	5	15	35	70	126
					1	6	21	56	126
						1	7	28	84
							1	8	36
								1	9
									1

I numeri istessi si ritrovano disposti nelle file diagonali parallele alla ipotenusa del triangolo.

BINOMIO DI NEWTON. Ma la proprietà più importante del triangolo consiste in queste, che le colonne verticali contengono i coefficienti dei differenti termini di una potenza qualunque del binomio $x+a$.

La 2ª colonna verticale che contiene il numero naturale 1 corrisponde alla prima potenza, i coefficienti della quale sono 1 ed 1. La 3ª colonna verticale che contiene il numero naturale 2 corrisponde alla seconda potenza, i coefficienti della quale sono 1, 2, 1. Quella che contiene il numero naturale 3, corrisponde ai coefficienti della terza potenza i quali sono 1, 3, 3, 1,

e così seguitando quelli della quarta sono 1, 4, 6, 4, 1, ec.

Si potrà dunque formare una potenza qualunque del binomio $x + a$ per mezzo del triangolo aritmetico, se si conosce in qual maniera la lettera x ed a entrano in questa potenza.

Ora la somma degli esponenti di queste lettere è costante in ogni termine ed uguale al grado della potenza; dal primo termine che contiene la sola x, sino all' ultimo che contiene la sola a, gli esponenti della x vanno scemando di un unità da un termine all' altro, e quelli della a crescendo di altrettanto: si avrà dunque

$$(x+a)^1 = x + a$$
$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$
$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$
$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$

ed in generale

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}a^nx^{m-n} + \ldots + ma^{m-1}x + a^m.$$

Questa bella formula è dovuta a Newton e porta il suo nome.

DELLE COMBINAZIONI. Si chiamano così tutti i differenti prodotti che si possono formare con m lettere prese n ad n. Le permutazioni si distingueno dalle combinazioni, perchè alcune tra le prime sono composte delle lettere stesse solamente disposte in ordine differente; così le quattro lettere a, b, c, d, preso due a due danno le sei combinazioni

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd,$$

e danno dodici permutazioni

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd,$$
$$ba,\ ca,\ da,\ cb,\ db,\ dc.$$

Il triangolo aritmetico può servire a determinare il numero di combinazioni di m lettere n ad n. Se si tratta per esempio di trovare questo numero per 8 lettere prese tre a tre; si discenderà nella colonna verticale che corrisponde al numero naturale 8 fino che si incontri la casa della 4ª colonna orizzontale, la quale ci darà il numero delle combinazioni cercate, che è 56.

La formula del binomio conduce allo stesso risultato, perchè il coefficiente del termine che ne ha n avanti di se esprime il numero delle combinazioni di m lettere prese n ad n. Questo coefficiente è

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots.\ n}$$

il quale facendovi $m = 8$ ed $n = 3$

$$\text{da} \quad \frac{8.7.6}{1.2.3} = 56$$

Questi ravvicinamenti fra i numeri figurati di primo ordine, il triangolo di Pascal, il binomio di Newton, e la teoria delle combinazioni sono meritevoli di considerazione.

Il numero delle permutazioni di m lettere n ad n è
$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$
e il numero delle permutazioni di n lettere n ad n è

$$1.2.3\ldots.(n-1)n.$$

Se si ha dunque una parola per esempio *amor*, e si voglia conoscere quante sono le parole differenti che si possono formare con le quattro lettere delle quali è composta, cioè quanti sono tutti gli anagrammi possibili di questa parola, si troverà che queste sono 24, perchè il prodotto dei numeri consecutivi

$$1.2.3.4 = 24.$$

Una parola di cinque lettere darebbe luogo a 120 permutazioni; perchè

$$120 = 1.2.3.4.5$$

una parola di sei a

$$720 = 1.2.3.4.5.6$$

una parola di sette lettere a

$$5040 = 1.2.3.4.5.6.7$$

Che se nelle parole proposte vi fossero una o più lettere ripetute, come nella parola Leopoldus dove la l e la o sono ri-

petute due volte, il numero degli anagrammi o delle permutazioni invece di essere

$$362880 = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9$$

diverrebbe

$$90720 = \frac{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9;}{1 . 2 . 1 . 2 .}$$

In generale il numero che indica le permutazioni che si otterrebbero, quando non vi fosse alcuna lettera ripetuta, dovrà essere diviso per 1 . 2 o per 1 . 2 . 3 . n per 1 . 2 . 3 . . . . n, se vi è una stessa lettera ripetuta 2 volte, 3 volte o n volte; e se vi sono più lettere ripetute più volte dovrà esser diviso per il prodotto

$$1 . 2 \ldots n . 1 . 2 \ldots n' . 1 . 2 . 3 \ldots n''$$

essendo queste lettere ripetute la prima n volte la seconda n' volte la terza n'' volte.

La parola *studiosus* ove la u è ripetuta due volte e la s tre volte, non è suscettibile che di

$$\frac{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9.}{1 . 2 . 1 . 2 . 3.}$$

Il verso latino

Tot tibi sunt dotes Virgo quot sidera cœlo

composto dal padre Bauhuys gesuita da Louvain è celebre per il numero grande di permutazioni delle quali è suscettibile senza che sieno infrante le leggi della prosodia.

Ericio Putaneo si è preso la briga di fare in 48 pagine la numerazione di queste permutazioni, soffermandosi alla 1022ma, numero delle stelle note allora, contento di far notare che la Vergine aveva più virtù che non eran le stelle del cielo.

Il P. Prestet estese il numero delle permutazioni possibili del verso a 3276.

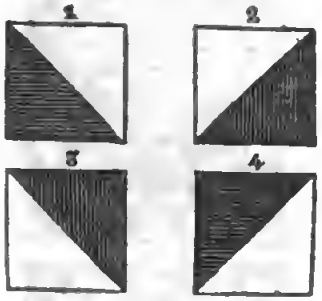
Ma Giacomo Bernouilli nella sua *ars conjectandi* mostrò, che anco lasciando da parte i versi spondaici ed ammettendo quelli che non hanno cesura, si giunge a 3312 permutazioni.

Si cita anco il verso di Tommaso Lanzio

Mars, mors, sors, lis, vis, Styx, pus, nox,
fox, mala, crux, fraus.

nel quale serbando al terzo ultimo posto la parola *mala*, per obbedire alla misura si ottengono 39 916 800 disposizioni differenti.

Dividendo un quadrato in due triangoli di colore differente, si possono i quadrati combinare in modo che formino delle disposizioni belle e variate, nello scompartire i pavimenti dei pubblici a privati edifizii.



Nelle figure 1, 2, 3, 4 si vede che a seconda delle posizioni che il quadrato prende, presenta quattro disegni differenti, che si riducono a due se si considera che nel 1° e nel 3° nel 2° e nel 4°, la parte chiara e la scura non han fatto che prendere l'una il posto dell'altra.

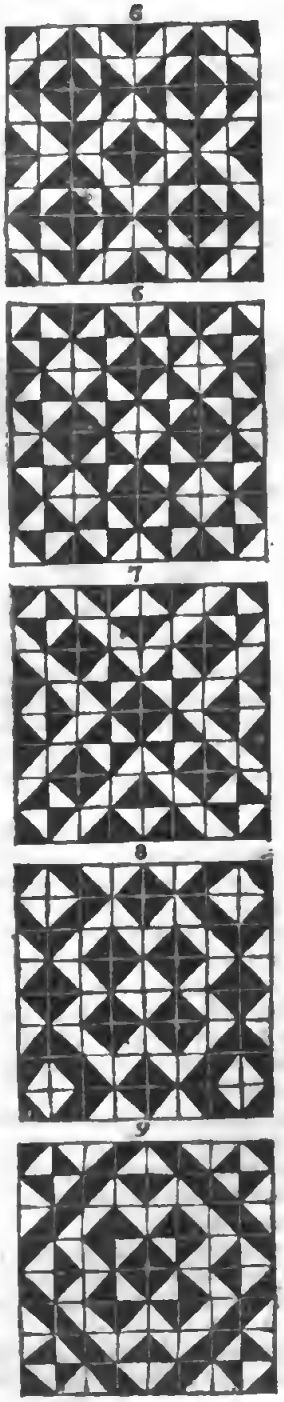
Dalla combinazione di due quadrati ne risultano sessantaquattro disposizioni differenti; perchè su ciascuno dei quattro lati rappresentati nelle figure 1, 2, 3, 4 si può porre un quadrato, in quattro posizioni e così si hanno in tutto $4 \times 4 \times 4$ cioè sessantaquattro disposizioni diverse. Tra queste ve ne è una metà che ripete l'altra, il che le riduce a 32, e non sarebbero che 10 se non si guardasse alla situazione loro.

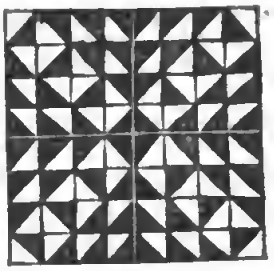
Si potrebbero combinare nel modo stesso, tre quattro cinque quadrati gli uni con gli altri, e si troverebbe che 3 danno 128 disegni tra loro differenti quattro ne danno 256 ec.

Si veggono qui sottoposti alcuni esempi dei compartimenti i più notabili che nascono da un numero di elementi al piccolo.

Si possono consultare in proposito le memorie dell'accademia di scienze per

l' anno 1704 e il trattato in 4° pubblicato dal P. Douat nel 1722.





§ 7. *Proprietà generali dei numeri.*

Gli antichi filosofi avevano fatto delle ricerche molto estese sulle proprietà dei numeri. Si trovano in Euclide e specialmente in Diofante dei frammenti curiosi di queste ricerche. I matematici che dopo di lui continuarono ad occuparsi delle proprietà dei numeri fino ai tempi di Viète e Bachet, si occuparono piuttosto di puerili ravvicinamenti e di pretese proprietà misteriose, che di studi profondi, e fecero poco avanzare la scienza. Fermat poco dopo Vieta e Bachet scoprì per nuove vie delle proprietà e dei teoremi importanti, che lasciò gran parte senza dimostrazione. Molte di queste ritrovate dal genio di Euler, di Lagrange, di Legendre, de Gaus, di Cauchy ec. alcune desiderate tuttavia.

DEI NUMERI PRIMI. Per trovare quante volte x un numero primo a entra come fattore nella serie dei numeri naturali da 1 fino ad n, o che è lo stesso, quale è la più gran potenza di a che divide il prodotto $1 . 2 . 3 \ldots . n$, si prende la formula

$$x = \mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{n}{a^2}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{n}{a^3}\right) + \text{ec.},$$

rappresentando

$$\mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right), \mathrm{E}\left(\frac{n}{a^2}\right), \mathrm{E}\left(\frac{n}{a^3}\right), \text{ec.}$$

ciascuno il più grande intero contenuto nelle frazioni

$$\frac{n}{a}, \frac{n}{a^2}, \frac{n}{a^3}, \ldots .$$

e proseguendo la serie fino che il numeratore è più grande del denominatore.

Così per sapere quante volte il fattore 7 si trova nel prodotto dei numeri naturali da 1 a 10000 si prenderà

$$E\left(\frac{10000}{7}\right) = 1428$$
$$E\left(\frac{1428}{7}\right) = 204$$
$$E\left(\frac{204}{7}\right) = 29$$
$$E\left(\frac{29}{7}\right) = 4$$
Somma $\overline{1665}$

dunque il prodotto di cui si tratta è divisibile per 7 alla potenza 1665mo ossia per 7^{1665}.

Tutti i numeri primi eccettuati 2 e 3 sono compresi nella formula

$$6x \pm 1$$

ma la reciproca non è vera, poichè questa formula contiene anco dei numeri che non son primi.

Facendo

$$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \text{ec.}$$

la formula col segno + dà i numeri

1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, ec.

e col segno — dà i numeri

1, 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, ec.

tra i quali 25 della prima serie e 35 della seconda non sono numeri primi.

Vi sono alcune formule rimarchevoli per la moltitudine dei numeri primi che comprendono. Tra queste la formula

$$x^2 + x + 17$$

della quale i 17 primi termini sono numeri primi; la formula

$$2x^2 + 29$$

della quale i primi 29 termini sono numeri primi; la formula

$$x^2 + x + 41$$

nella quale sono numeri primi i quaranta primi termini, cioè i numeri che risultano facendo in queste formule successivamente

$$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \text{ec.}$$

Questi numeri sono per la prima formula

17, 19, 23, 29, ec.

per la seconda

29, 31, 37, 47, ec.

per la terza

41, 43, 47, 53, 61, 71, ec.

i quali sono primi tutti sino ai limiti indicati.

Fermat aveva annunziato, senza darne per dimostrato, che la formula $2^x + 1$ dava sempre dei numeri primi, prendendo per x un termine della progressione per due 1, 2, 4, 8, 16, ec. Però Euler trovò che questa formula non era esatta per $x = 32$, perchè dava 4 294 967 297 numero divisibile per 641, e che dà per quoziente 6 700 417.

Quantunque la serie dei numeri primi sia irregolarissima, si può trovare tuttavia con approssimazione bastante quanti di questi numeri sono contenuti tra limiti 1 ed x per mezzo della formula

$$y = \frac{x}{2{,}302585.\,\text{Log.}\,x - 1{,}08366}$$

Di fatto paragonando il risultato tratto dalla formula, con l'enumerazione immediata fatta nella tavola che abbiamo dato pei numeri primi da 1 a 10000 (V. ARITMETICA p. 13) si trova in ambedue i casi 1230.

Legendre al quale si deve questa bella formula, l'ha verificata per mezzo delle tavole di Vega che contengono i numeri primi fino a 400000. Ponendo x uguale a queste numero, si trova $y = 33\,854$: la verificazione diretta sulle tavole di Vega dà 33 861.

Il *Vaglio aritmetico* di Ladislao Chernac che va fino ad 1 000 000 ha offerto a Legendre una nuova verificazione, poichè questa tavola contiene 78 493 numeri primi, e la formula ce ne indica 78 543.

Questo resultato è dunque in errore di 50 unità su 78493 essia di circa $\frac{1}{1570}$.

NUMERI PERFETTI. Si chiamano così quelli che sono uguali alla somma delle loro parti aliquote. Così è del 6, che è uguale alla somma delle sue parti aliquote 1, 2, 3, del

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

Se si prende la progressione per due

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 ec.

o si cerchi tra i termini di questa progressione diminuiti di una unità quali sono numeri primi, si troverà che i termini

2, 4, 8, 32, 128, 8192 ec.

diminuiti di una unità danno

1, 3, 7, 31, 127, 8191,

i quali sono numeri primi. Moltiplicando ciascuno di questi numeri per il termine della progressione precedente a quelle da cui deriva, come per esempio 8 per 2, 7 per 4, 31 per 16 ec. si ottengono i numeri

6, 28, 496, 8128, 33550336,

che sono numeri perfetti.

Questi numeri sono compresi nella formula $2^n - 1\ (2^n - 1)$ per la quale ha dimostrato Euclide negli elementi (l. 9 prop. 35) che si avranno dei numeri perfetti ogni volta che $2^n - 1$ è un numero primo. In queste serie sono compresi oltre i numeri perfetti precedenti anco i numeri

$(2^{16})(2^{17}-1) = 8589869056$

$(2^{18})(2^{19}-1) = 137438691328$

$(2^{30})(2^{31}-1) = 2305843008139952128$

il numero $(2^{31}-1)$ che Euler assicura essere un numero primo, è il più grande dei numeri primi che si conoscono, e per conseguenza

$$(2^{30})(2^{31}-1)$$

è il più gran numero perfetto che si conosce.

NUMERI AMICI. Si chiamano amici tra loro due numeri quando le parti aliquote di ciascuno di essi formano una somma uguale all'altro. Tali sono 220 e 284 perchè 220 è la somma di

1, 2, 4, 71, 142,

che sono le parti aliquote di 284, e 284 è la somma di

1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110

che sono le parti aliquote di 220.

Si possono trovare dei numeri amici col metodo seguente. Si scriveranno come si vede appresso i termini della progressione geometrica per 2, cominciando da 2; poi si triplicheranno e si scriverà la nuova progressione sotto la prima; da ciascuno dei termini di questa seconda togliendo un'unità, si formerà una terza serie 5, 11, 23 ec. che si scriverà al di sopra della prima; si scriverà in fine una quarta serie moltiplicando ciascuno dei termini della seconda serie 6, 12, 24, ec.: per quello che lo precede e togliendo al prodotto una unità. Le quattro serie sono riunite qui sotto

6	11	23	47	95	191	383
2	4	8	16	32	64	128
6	12	24	48	96	192	384
	71	287	1151	4607	18431	73727

Si prende un numero della serie inferiore, per esempio 71, al quale corrisponda nelle serie superiore il numero 11; a questo precede il 6: se 11, 6 e 71 sono numeri primi, si otterranno i numeri amici moltiplicando 5 per 11 e poi per 4, termine che corrisponde all'11 nella progressione geometrica, il prodotto 220 sarà uno dei numeri amici: si otterrà l'altro moltiplicando 71 per 4, il che da 284.

Nel modo stesso con 1151, 47 e 23, che sono numeri primi, si ottengono due altri numeri amici 17296, 18416; ma 4607

e i due numeri corrispondenti 95 e 47 non potrebbero dare due numeri amici, perchè eno di essi 95 eoe è numero primo; lo stesso accade di 18431, meetre 73727 coi anoi corrispondenti 383, 191 danno due nuovi eomeri amici

9 363 584 e 9 437 056.

Le serie precedenti adopraedo i aegui algebrici divengono

$2.3-1, 2^2.3-1, 2^3.3-1, 2^4.3-1$, ec.

$2, \quad 2^2, \quad 2^3, \quad 2^4$ ec.

$2.3 \quad 2^2.3 \quad 2^3.3 \quad 2^4.3$, ec.

$2^2.3^2-1, 2^3.3^2-1, 2^7.3^2-1$.

Da queste se i eumeri

$2^{2n-1}.3^2-1, \; 2^n.3-1, \; 2^{2n-1}.3-1$

sono primi, si deducono i eumeri amici che sono espressi uno da

$$(2^{2n-1}.3-1)(2^n.3-1)2^n$$

l'altro da

$$(2^{2n-1}.3^2-1)2^n.$$

Queste coppie di nemeri amici sono state date da Schooten eelle sue *exercitationes mathematicæ sect.* 9. Egli primo ha posto il nome di amici a questi numeri, benchè Descartes e Redolff ed altri si aiano occnpati innanzi a lui di qeesti nameri.

TRIANGOLI RETTANGOLI IN NUMERI. Se tre numeri sono tali che il quadrato del maggiore aia la somma dei qeadrati degli altri due, ai dice che formano ne triangolo rettangolo. Se ne ha on esempio semplice nei numeri 3, 4, 5 perchè

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

e nei numeri 5, 12, 13 perchà

$$13^2 = 5^2 + 12^2.$$

Le formule segeeeti nelle quali a è arbitrario danno ur numero qualunque di triaegoli. I lati minori sono rappreseetati da

$$2a + 1 \text{ e } 2a(a+1)$$

il maggiore da

$$2a^2 + 2a + 1$$

difatto

$$4a^2(a+1)^2 + (2a+1)^2 = (2a^2+2a+1)^2$$

Le formule $2ab$ e $a^2 - b^2$ dove a e b sono arbitrari, possono aervire ad eaprimere i due lati piu piccoli del triaegolo ed il maggiore sarà allora

$$a^2 + b^2$$

difatto

$$(a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2 = (a^2+b^2)^2.$$

La formula dei Pitagorici per determinare queati triangoli può scriversi nel modo aegueete

$$a^2 + \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2$$

ed il metodo col quale li determineva Piatone si può tradurre eella equazione

$$a^2 + \left(\frac{a^2}{4} - 1\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} + 1\right)^2$$

si può anco adoprare la formela

$$(4a^2+8a+3)^2 + (4a+4)^2 = (4a^2+8a+5)^2$$

eella quale l'ipotenusa $4a^2+8a+5$ e il lato $4a^2+8a+3$ non differiacono che di due ueità.

FATTI SINGOLARI RELATIVI ALLE POTENZE DEI NUMERI. Fermat ha dimostrato che l'area d'un triangolo ie eumeri ieteri noe può essere un quadrato. Si deve a lui anco questo importante teorema che è imposaibile che la

somma di due cubi sia un cubo esatto, che la somma di due quarte potenze sia una quarta potenza: in generale che la somma di due potenze n^{esime} sia una potenza n^{esima} in numeri interi o fratti quando n è maggiore di due.

Questo teorema di Fermat è il solo che non sia stato sino ad ora dimostrato completamente. Euler e Legendre lo hanno dimostrato per la potenza terza e quinta; è facile il dimostrarlo per la 4. Lejeune-Dirichlet ha trovato una dimostrazione particolare alla potenza 14. e Lamè è giunto poi a trovarla per la 7ª. Stabilito il teorema per una potenza data, esso è vero per tutte le potenze multiple; e così oggi è provato per le potenze

3, 6, 9, 12, 15; 4, 8, 12, 16; 5, 10, 15, 20, 25; 7, 14, 21, 28, ec.

La somma di due quarte potenze non può essere un quadrato.

La somma di una quarta potenza e del doppio di un quadrato non può essere una quarta potenza. La somma o la differenza di due cubi non può esser il doppio di un cubo

Nessun numero triangolare eccetto 1 è uguale a un cubo o ad una quarta potenza.

Un numero qualunque può formarsi dalla addizione di tre numeri triangolari, da quella di quattro quadrati, di cinque pentagoni, di sei esagoni, e così seguitando. Questa bella proposizione devesi pure a Fermat.

NUMERI CONGRUI. Se la differenza di due numeri interi a e b positivi o negativi è divisibile per un terzo numero positivo p; in modo che $\frac{a-b}{p}$ sia un numero ietero, a, e b si chiamano *congrui* per rapporto a p; il divisore p dicesi modulo. Gauss interpone il segno $\equiv$ tra a, e b, per indicare che questi sono congrui, servendosi della notazione $a \equiv b \pmod p$.

Avendosi le due congruenze

$$a \equiv b \pmod p$$
$$a' \equiv b' \pmod p$$

se ne dedncono

$$a \pm a' \equiv b \pm b' \pmod p$$
$$aa' \equiv bb' \pmod p$$

medesimamente per

$$a \equiv b \pmod p$$

si ottiene

$$a^m \equiv b^m \pmod p$$

e

$$f(a) \equiv f(b) \pmod p$$

ponendo che f rappresenti una funzione

$$f(x) = A\,x^m + B\,x^{m-1} + \text{ec.}$$

nella quale m è intero ed i coefficenti A, B, ec. sono numeri interi.

TEOREMA DI FERMAT. Se p è un numero primo che non divide a, $a^{p-1}-1$ è divisibile per p; il che si indica ponendo la congruenza

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

TEOREMA DI WILSON. Se p è un numero primo

$$1.2.3....p + 1 + 1$$

è divisibile per p, ossia

$$1.2.3...(p-1) \equiv -1 \pmod p.$$

Questo teorema e il precedente sono fondamentali nella teoria delle congruenze; questa come vedremo è intimamente unita alla teoria delle equazioni algebriche, e presta dei soccorsi indispensabili per la soluzione di una classe di equazioni, della quale ci occuperemo tra poco.

§ 8. *Analisi indeterminata del primo grado.*

Quando un problema conduce ad un numero di equazioni minore del numero delle incognite ammette una infinità di soluzioni algebriche. Tuttavia, se la natura della questione esige che i valori delle incognite sieno dei numeri interi, il problema stesso diviene talora impossibile. Della qual cosa ci dà un esempio il teorema di Fermat rammentato poc'anzi rispetto alla somma di due potenze n^{esime}. In ogni

caso l'analisi indeterminata ha per oggetto di ricercare le soluzioni in numeri interi.

Ci limiteremo ad accennare ciò che riguarda un'equazione di primo grado a due incognite. Questa può sempre ricondursi alla forma

$$ax + by = c$$

dove a, b, c sono numeri interi positivi o negativi che non hanno divisore comune.

Perchè questa equazione ammetta soluzioni intere bisogna che a e b siano primi tra loro.

Se si riduca $\frac{b}{a}$ in frazione continua e si rappresenti la penultima ridotta con $\frac{p}{q}$, si avrà dalle note proprietà delle frazioni continue

$$ab - bq. = \pm 1$$

dove si prenderà il segno superiore o il segno inferiore, secondo che la ridotta è di posto pari o dispari.

Di qui si ha

$$apc - bqc = \pm c$$

perciò si sodisfarà alla equazione data, ponendo nel primo caso

$$x = pc,\ y = -qc$$

e nel secondo ponendo

$$x = -pc\ y = qc.$$

Quando della equazione

$$ax + by = c$$

si è conosciuta una soluzione intera

$$(x = x';\ y = y')$$

si ottengono tutte le altre per mezzo delle formule

$$x = x' \pm bt$$
$$y = y' \mp at$$

dove t è un numero intero qualunque.

§ 9. *Potenze e radici delle quantità algebriche e numeriche.*

Nei primi tempi dell'algebra non si consideravano che le quantità positive; poco dopo che si cominciò ad aver riguardo alle quantità negative furono introdotti i segni più e meno $+$, $-$; quindi si rappresentarono e si eseguirono le operazioni algebriche sopra le lettere, finalmente fu introdotta da Cartesio la notazione degli esponenti. Questi servirono a rappresentare da prima solamente le potenze 1^a 2^a 3^a 4^a ec. di una quantità, espresse da numeri interi e positivi; quindi anco le potenze frazionarie e negative.

Talchè ponendo per esempio

$$a^{-3} = a^{\frac{1}{3}} \text{ ed } a^{\frac{-1}{4}} = \sqrt[4]{a}$$

non si è fatto che attribuire alle notazioni algebriche un significato più generale.

Come si inalza un prodotto ad una potenza inalzando a questa potenza ciascuno dei suoi fattori; così si estrae la radice da un prodotto estraendo quella di ciascuno dei suoi fattori. Così:

$$\sqrt[m]{a^m b} = a\sqrt[m]{b}$$

Si troverà

$$\sqrt[m]{a}\ \sqrt[m]{b}\ \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{abc}$$

osservando che ciascuna di queste due quantità inalzata alla potenza m è uguale ad abc.

E pnichè si ha la potenza n^{esima} di $\sqrt[mn]{a}$ uguale a $\sqrt[m]{\sqrt[m]{a}}$ si avrà pure

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{\sqrt[m]{a}}} = \sqrt[mn]{a}$$

Se noi facciamo

$$\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$$

adoprando gli esponenti frazionari in luo-

go dei radicali, si avrà pure negli esempi precedenti

$$\sqrt[m]{a^m b} = a^{\frac{m}{m}} b^{\frac{1}{m}} = ab^{\frac{1}{m}}$$

$$\sqrt[m]{abc} = (abc)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}} b^{\frac{1}{m}} c^{\frac{1}{m}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}}$$

Il calcolo degli esponenti frazionari si applica ai polinomi nel modo stesso che ai monomi; la esposizione particolare dei casi differenti che possono presentare tutte le operazioni algebriche ci porterebbe troppo in luogo, e crediamo possano bastare gli esempi seguenti per ricchiarare le teorie di sopra accennate.

La radice m^{esima} di un monomio si ottiene prendendo la radice m^{esima} del coefficiente, e dividendo per m l'esponente di ciascuna lettera: così

$$\sqrt[3]{64a^3b^3} = 4ab^2$$

Applicando questa regola in tutta la sua generalità, e profittando della notazione degli esponenti frazionarii positivi e negativi, una delle più utili dell'algebra, si otterrà

$$\sqrt[5]{32a^5b^3c} = 2a^{\frac{5}{5}} b^{\frac{3}{5}} c^{\frac{1}{5}}$$

ed in generale

$$\sqrt[n]{\frac{a^p}{b^q}} = \sqrt[n]{a^p b^{-q}} = a^{\frac{p}{n}} b^{-\frac{q}{n}}$$

Il modo di operare sugli esponenti frazionari positivi o negativi, nel fare un prodotto di radicali, un quoziente, una potenza, un estrazione di radice è lo stesso che per gli esponenti interi

L'estrazione di radice da un polinomio è fondata sulla formula del binomio di Newton.

Se si abbia ad estrarre da un polinomio P la radice m^{esima}, si ordina questo per rapporto alle potenze decrescenti o crescenti di una lettera, si prenda la radice del primo termine, e si ottiene così il primo termine della radice. Quindi si divide il secondo termine di P per m volte la $(m-1)^{esima}$ potenza del 1° termine trovato in radice e si ottiene così il 2° termine della radice. Si sottrae la m^{esima} potenza della somma dei due termini trovati dal polinomio P, e si divide il resto per m volte la $(m-1)^{esima}$ potenza di questi primi termini; e così seguitando, se il polinomio proposto è una potenza esatta, si giungerà ad un resto zero.

Se noi prendiamo $m = \frac{1}{2}$ il binomio di Newton estendendolo agli esponenti frazionari positivi e negativi darà

$$(x+a)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} a - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2.2} x^{-\frac{3}{2}} a^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2.2} \cdot \frac{3}{2.3} x^{-\frac{5}{2}} a^3 - \text{ec.}$$

formula che potrà servire ad estrarre la radice seconda di un numero qualunque; se per mezzo di essa si cerchi la radice seconda di 101 porremo $x = 100$, $a = 1$ ed avremo

$$\sqrt{101} = (100+1)^{\frac{1}{2}} = 10 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2.2} \cdot \frac{1}{10^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2.2} \cdot \frac{3}{2.3} \cdot \frac{1}{10^3} - \text{ec.}$$

$$= 10 + 0,05 - 0,000125 + 0,000000625 \text{ ec.}$$

$$= 10,049876$$

dove potremo trascurare i termini successivi della serie come piccolissimi contentandosi di 6 decimali.

§ 10. *Massimo comune divisore delle quantità algebriche.*

Per trovare il massimo comune divisore tra due monomi, basta prendere il massimo comune divisore dei coefficienti di ciascun monomio, e moltiplicarlo per ciascuna lettera contenuta in ambedue i monomi, dando a questa il più basso esponente col quale si presenta in uno di essi: così i monomi $39\,a^2b^3c$ e $65\,a^3b^4d^2$ hanno per comune divisore $13\,a^2b^3$. Il massimo comune divisore di più monomi si ottiene nel modo stesso. Il massimo comune divisore di due polinomi si ottiene ordinando ciascun polinomio per le potenze discendenti di una stessa lettera, dividendo il polinomio che contiene la più alta potenza della lettera ordinatrice per l'altro, questo per il primo resto, il primo resto per il secondo, sicchè si giunga ad un quoziente esatto; il resto contenuto esattamente come fattore nel resto precedente è il divisore cercato. Si potranno per comodo della operazione introdurre o sopprimere nel dividendo dei fattori che non sieno comuni al divisore e viceversa. Operando nel modo indicato pei polinomi

$$3x^3 - 10x^2 + 15x + 8$$
$$x^3 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6$$

si troverà che il loro più grao divisore è

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

Se due polinomi M ed N contengono due lettere x ed y e non hanno fattori monomi comuni si ordineranno rapporto ad una di esse x per esempio. I coefficienti delle potenze decrescenti dello x saranno allora dei polinomi, i quali conteogono la sola lettera y.

Si potranno mettere M ed N sotto la forma

$$M = a.A \quad N = b.B$$

supposto che a e b sieno fattori indipendenti da x: e si determinerà il più gran divisore comune di A e B che supporremo D, e il più grao divisore comune di a e b che supporremo d: allora il divisore comune di M ed N sarà D. d il primo dei quali dipende da x, l'altro da y soltanto.

Si possono per comodo dell'operazione introdurre o sopprimere in uno dei polinomi A e B dei fattori algebrici contenenti y, i quali non sieno comuni all'altro.

Nel modo stesso si tratterà il caso in cui i polinomi contengano 3, 4, 5, 6 ec. n lettere.

§ 11. *Funzioni derivate.*

Se in un polinomio

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + rx^2 + sx + t$$

che indicheremo con $f(x)$ *funzione di* x si sostituisca $x + h$ invece di x, e si ordini il risultato che svilupperemo secondo la formula del binomio per rapporto alle potenze crescenti di h, si vedrà che al variar di x la funzione $f(x)$ diviene

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x) + \ldots + \frac{h^m}{1.2\ldots m}f^{(m)}x$$

dove $f(x)$ è il polinomio dato, e $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ ec.

sono le *derivate successive* di questo polinomio.

I valori di queste derivate sono

$$f'(x) = mx^{m-1} + a(m-1)x^{m-2} + \ldots + 2rx + s$$
$$f''(x) = m(m-1)x^{m-2} + a(m-1)(m-2)x^{m-3} + \ldots + 2r$$
$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)x^{m-3} + a(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4} + \ldots$$
$$f^{(m)}(x) = m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1.$$

e ciascuna di esse deriva dalla precedente, con la stessa legge con la quale $f'(x)$ deriva da $f(x)$.

Quando si abbia la funzione

$$f(x)=(x-A)(x-B)(x-C)\dots(x-N)$$

se invece di x si sostituisca $x+h$ si avrà

$$f(x+h)=(h+x-A)(h+x-B)(h+x-C)\dots(h+x-N)$$

$$=h^m+x-A\left|\begin{matrix}+x-B\\+x-C\\\dots\\x-N\end{matrix}\right.\left|\begin{matrix}h^{m-1}+(x-A)(x-B)\\+(x-A)(x-C)\\+(x-B)(x-C)\\\dots\\+(x-M)(x-N)\end{matrix}\right.\left|h^{m-2}+\dots\right.$$

Ordinando per le potenze ascendenti di h, e paragonando i coefficienti di $h, h^2 \dots h^m$ in questo sviluppo coo quelli corrispondenti nello sviluppo precedente, si ottiene

$$(x-A)(x-B)(x-C)\dots(x-N)=fx$$

$$\frac{f(x)}{x-A}+\frac{f(x)}{x-B}+\frac{f(x)}{x-C}+\dots\frac{f(x)}{x-N}=f'x$$

$$\frac{fx}{(x-A)(x-B)}+\frac{fx}{(x-A)(x-C)}+\frac{fx}{(x-B)(x-C)}+\dots+\frac{fx}{(x-M)(x-N)}=\frac{f''x}{1.2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Prendiamo il rapporto

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

dove h rappresenta l'aumento della variabile x, e $f(x+h)-f(x)$ rappresenta l'aumento della funzione, dipendente dall'aumento h della variabile; si troverà

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'x+\frac{h}{1.2}f''(x)+\frac{h^2}{1.2.3}f'''(x)+\dots+h^{m-1}$$

si vede dal secondo membro di questa equazione, che quanto più h si avvicina a zero, tanto più il rapporto dell'aumento della funzione a quello della variabile si avvicina a $f'(x)$, che è *la derivata di primo ordine*, e rappresenta il limite di questo rapporto.

Osservando i valori che prendono $f(x)$ e $f'(x)$ quando si fa crescere x per gradi insensibili dal valore a al valore b, la funzione $f(x)$ si vedrà crescere sintanto che la derivata $f'(x)$ conserverà un valore positivo, e comincerà a decrescere quando la derivata prenderà un valore negativo, o viceversa.

Quando la derivata prima passando dal valore positivo al negativo, o viceversa prende un valore zero, la funzione $f(x)$ passa per un massimo o per un minimo, quindi il valore a di x che corrisponde ad un massimo o ad un minimo della funzione, rende nulla la derivata. Nel caso del massimo la sostituzione di a invece di x nella derivata $f''(x)$ da un risultato negativo, nel caso del minimo lo da positivo.

Se la derivata $f''(x)$ fosse essa pure zero, bisognerebbe che fosse zero anco la successiva $f'''(x)$ perchè vi fosse massimo o minimo. In generale non vi sarebbe nè massimo nè minimo, se la prima derivata che non si annulla per $x=a$ fosse di ordine dispari.

§ 12. *Funzioni simmetriche e funzioni simili.*

FUNZIONI SIMMETRICHE. Una funzione di due o più quantità dicesi simmetrica, quando il suo valore non cambia permutando le quantità che la compongono. Tra le funzioni simmetriche delle quantità $a\ b\ c \ldots l$ meritano considerazione particolare i coefficienti delle diverse potenze di x nei prodotto

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l).$$

$$\begin{array}{l|l|l} = x^m & x^{m-1} & x^{m-2} + \ldots + abc\ldots l \\ \quad - a & \quad ab & \\ \quad - b & \quad ac & \\ \quad - c & \quad bc & \\ \quad \ldots\ldots & \quad \ldots\ldots & \\ \quad - l & \quad hl & \end{array}$$

che supporremo composto di m fattori.

Ponendo

$$p_1 = -(a+b+c\ldots+l)$$
$$p_2 = ab + ac + bc \ldots + hl$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_m = \mp abc\ldots.l$$

questo prodotto prenderà la forma

$$(1)\quad x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots p_m$$

e dovrà andare a zero ponendo invece di x uno qualunque dei valori $a, b, c \ldots l$.

Questi valori sono le radici della equazione che si ottiene uguagliando a zero il polinomio (1).

Una funzione razionale simmetrica delle radici di questa equazione, si può esprimere razionalmente per mezzo dei coefficienti p del polinomio.

Si prenda infatti l'equazione

$$(1)\quad x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_{m-1} x + p_m = 0$$

che rappresentiamo con $X = 0$; il polinomio derivato X' sarà

$$(1')\quad X' = mx^{m-1} + (m-1)\, p_1\, x^{m-2} + \ldots + 2\, p_{m-2} + p_{m-1}$$

e si avrà designando le radici dell'equazione (1) con $a, b, \ldots l$ (V. pag. 74).

$$X' = \frac{X}{x-a} + \frac{X}{x-b} + \ldots + \frac{X}{x-l}$$

Effettuando la divisione

$$\begin{array}{l|l|l} \dfrac{X}{x-a} = x^{m-1} & x^{m-2} & x^{m-3} + \ldots + a^{m-1} \\ \quad + a & \quad + a^2 & \quad + p_1 a^{m-2} \\ \quad + p_1 & \quad + p_1 a & \quad + p_2 a^{m-3} \\ & \quad + p_2 & \quad + \ldots\ldots \\ & & \quad + \ldots\ldots \\ & & \quad + p_{m-2} a \\ & & \quad + p_{m-1} \end{array}$$

ponendo in questa equazione in luogo di a ciascuna delle altre radici, facendo

$$s_n = a^n + b^n + c^n \ldots + l^n$$

e sommando i resultati, avremo

$$\begin{array}{l|l|l} X' = mx^{m-1} + s_1 & x^{m-2} + s_2 & x^{m-3} + \ldots + s_{m-1} \\ \quad + mp_1 & \quad + s_1 p_1 & \quad + s_{m-2} p_1 \\ & \quad + mp_2 & \quad + s_{m-3} p_2 \\ & & \quad + \ldots\ldots\ldots \\ & & \quad + \ldots\ldots\ldots \\ & & \quad + mp_{m-1} \end{array}$$

Paragonando questo valore con quello scritto di sopra (1′) si ottiene

$$\begin{aligned} & s_1 + p_1 = 0, \\ & s_2 + s_1 p_1 + 2 p_2 = 0, \\ & s_3 + s_2 p_1 + s_1 p_2 + 3 p_3 = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & s_{m-1} + s_{m-2} p_1 + s_{m-3} p_2 + \ldots + (m-1) p_{m-1} = 0 \end{aligned}$$

In generale moltiplicando la proposta per x^n essa diviene

$$x^{m+n} + p_1 x^{m+n-1} + p_2 x^{m+n-2} + \ldots + p_m x^n = 0$$

ponendo $a, b, \ldots l$ in luogo di x e sommando i risultati, si avrà

$$s_{m+n} + s_{m+n-1} p_1 + s_{m+n-2} p_2 + \ldots + s_n p_m = 0$$

Queste formule daran le somme

$$s_1, s_2 \ldots\ldots s_q,$$

per mezzo dei coefficienti

$$p_1, p_2 \ldots\ldots p_m,$$

quando la proposta (1) sia un prodotto di m fattori di primo grado della forma

$$(x-a)(x-b)\ldots(x-l).$$

Inoltre dalle

$$s_1, s_2 \ldots\ldots s_q$$

si potrà ottenere una funzione qualunque razionale e simmetrica delle $a, b, \ldots\ldots l$ nel modo seguente.

Se consideriamo una funzione simmetrica che abbia un termine $a^p b^q$, di questa si conosceranno tutti gli altri termini, e potremo rappresentarla così

$$\Sigma\, a^p b^q$$

moltiplicando tra loro s_p ed s_q il prodotto sarà la somma di due funzioni

$$\Sigma\, a^q b^q \text{ e } s_{p+q};$$

così chè avremo

$$s_p s_q = \Sigma\, a^q b^q + s_{p+q}$$

quindi

$$(2)\quad \Sigma\, a^p b^q = s_p s_q - s_{p+q}$$

si otterrà nel modo stesso

$$s_r \sum a^p b^q = \sum a^p b^q c^r + \sum a^{p+r} b^q + \sum a^p b^{q+r}$$

e quindi

$$(3)\quad \sum a^p b^q c^r = s_r \sum a^p b^q - \sum a^{p+r} b^q - \sum a^p b^{q+r}$$

la funzione simmetrica (2) dicesi doppia la (3) tripla ec. Si vede che queste possono essere espresse sotto forma razionale ed intera per mezzo dei coefficienti della equazione proposta.

Bisogna osservare che se q diviene uguale a

$$p \sum a^p b^q c^r$$

si riduce a

$$2 \sum a^p b^q c^r$$

e se

$$r = q = p$$

a

$$2 \cdot 3 \sum a^p b^p c^p.$$

Formare l'equazione da cui dipende una funzione razionale e non simmetrica delle radici di una equazione.

Se $V = F(a, b, \ldots l)$ è una funzione razionale che contiene n delle m radici della proposta, il più gran numero di valori di V che si ottenga cambiando tra loro $a, b, \ldots l$ sarà eguale a

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$$

se questi valori sieno in numero μ li potremo rappresentare con

$$V_1, \quad V_2, \quad V_3 \ldots V_\mu$$

e l'equazione in V sarà

$$(V-V_1)(V-V_2)(V-V_3)\ldots(V-V_\mu)=0$$

Essendo questa una funzione simmetrica di

$$V_1 \; V_2 \ldots V_\mu$$

ed in conseguenza delle radici della proposta si potranno calcolare i coefficienti delle equazione in V per mezzo delle funzioni simmetriche nel modo esposto precedentemente.

Se

$$V = F(a, b, \ldots l)$$
$$y = f(a, b, \ldots l)$$

sono due funzioni delle radici della equazione (1) tali che per tutte le sostituzioni corrispondenti acquistino i valori corrispondenti

$$V_1 \; V_2 \ldots V_\mu$$
$$y_1 \; y_2 \ldots y_\mu$$

queste funzioni si chiameranno *simili*.

Ora prendendo $V^n y$ questa funzione non potrà prendere per le diverse sostituzioni che i valori

$$V_1^n y_1, \; V_2^n y_2 \ldots V_\mu^n y_\mu$$

e la somma di questi sarà una funzione simmetrica della proposta, la quale rappresenteremo con t_n; e potremo considerare come cognita.

Quindi ponendo

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + \ldots + y_\mu &= t_0 \\ V_1 y_1 + V_2 y_2 + \ldots + V_\mu y_\mu &= t_1 \\ V_1^2 y_1 + V_2^2 y_2 + \ldots + V_\mu^2 y_\mu &= t_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ V_1^{\mu-1} y_1 + V_2^{\mu-1} y_2 + \ldots + V_\mu^{\mu-1} y_\mu &= t_{\mu-1} \end{aligned}$$

si potranno dedurre da queste equazioni i valori di

$$y_1, y_2 \ldots y_\mu \text{ dati per } t_0, t_1, \ldots t_{\mu-1} \text{ e per } V_1, V_2 \ldots V_\mu.$$

§ 13. *Proprietà generali delle equazioni di qualunque grado.*

RADICI DELLE EQUAZIONI. Un equazione del grado m ad una sola incognita può essere ricondotta alla forma

$$(1). x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} \ldots + p_m = 0$$

dove $p_1\ p_2 \ldots p_m$ sono funzioni simmetriche delle radici della equazione. Queste radici saranno reali o immaginarie, ma sempre in numero uguale al grado della equazione. Se $p_1\ p_2 \ldots p_m$ sono coefficienti numerici, e si sostituiscono successivamente nel primo membro dell'equazione invece di x due valori $x = A$, $x = B$, si otterranno due resultati numerici, i quali se saranno l'uno positivo l'altro negativo, indicheranno che l'equazione ha almeno una radice reale compresa tra A e B.

Una equazione di grado dispari ammetto almeno una radice reale di segno contrario a quello dell'ultimo termine p_m, un equazione di grado pari che ha l'ultimo termine negativo, ammette almeno due radici reali l'una positiva l'altra negativa.

Se i termini dell'equazione (1) sono tutti dello stesso segno questa equazione non ha radici positive.

Se una equazione è completa, e i suoi termini sono alternativamente positivi o negativi la equazione non ha radici negative.

Se una equazione non contiene che le potenze pari della incognita, tutte le radici hanno valori due a due uguali e di segno contrario, e reciprocamente.

DECOMPOSIZIONE DELLE EQUAZIONI IN FATTORI. Se $x = a$ è una radice dell'equazione (1), il primo membro di essa è divisibile per $x - a$, e reciprocamente.

Più generalmente se si divide per $x - a$ il polinomio che rappresenta il primo membro della equazione (1), il resto di questa divisione è uguale al valore che prende questo polinomio sostituendovi a invece di x.

Poichè un equazione di grado m ammette m radici reali o immaginarie; il primo membro di una equazione si può decomporre in una sola maniera in m fattori binomi di primo grado della forma

$$x - a, x - b, \ldots\ldots$$

Un equazione di grado pari nella quale i coefficienti sono quantità reali, può essere sempre decomposta in fattori reali di secondo grado.

Il numero dei fattori di secondo grado in una equazione del grado m è

$$\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$$

il numero dei divisori di terzo grado è

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

il numero dei divisori di grado n è

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-1)\,\ldots\,(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,n}$$

il numero totale dei suoi divisori è

$$2^m-1$$

In ogni equazione ridotta alla forma (1) il coefficiente del secondo termine è la somma delle radici prese con segno contrario.

Il coefficiente del terzo termine è la somma dei prodotti due a due delle radici.

Il coefficiente del quarto termine è la somma dei prodotti tre a tre delle radici, prese con segno contrario e così seguitando.

Finalmente il coefficiente dell'ultimo termine è uguale al prodotto di tutte le radici prese con segno contrario.

SOMMA DELLE POTENZE SIMILI DELLE RADICI DI UNA EQUAZIONE. In una equazione (1) facendo s_n uguale alla somma delle radici inalzate ciascuna alla potenza n, e rappresentando la equazione (1) con X e la derivata prima con X' si avrà

$$\frac{X'}{X}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\ldots\frac{1}{x-l}=\frac{m}{x}+\frac{s_1}{x^2}+\frac{s_2}{x^3}+\text{ec.}$$

e non si dovrà far altro per ottenere s_1, s_2, ec. che eseguire la divisione di X' per X. Si vede che questo saranno date in funzione intera dei coefficienti della equazione proposta.

Da quello che abbiamo veduto nel paragrafo 11, in generale può esprimersi razionalmente per mezzo dei coefficienti della proposta, ogni funzione delle radici della proposta il cui valore non cambia permutando queste radici tra loro. Queste diconsi funzioni *simmetriche* e sono semplici doppie triple ec. se ciascun termine contiene una, due, tre ec. lettere.

REGOLA DEI SEGNI DI DESCARTES. Quando due termini vicini di una equazione hanno lo stesso segno dicesi che vi è *permanenza*; quando hanno segni differenti vi è *variazione*.

In una equazione il numero delle radici positive non può sorpassare il numero delle variazioni di segno; e il numero delle radici negative non può sorpassare il numero delle variazioni della trasformata ottenuta cangiando x in $-x$.

In una equazione completa il numero delle radici negative è uguale al più al numero delle permanenze.

In una equazione completa che ha tutte le radici reali, il numero delle radici positive è uguale al numero delle variazioni, e quello delle radici negative al numero delle permanenze.

Quando manca un termine tra due dello stesso segno l'equazione ha almeno due radici immaginarie.

TEOREMA DI STURM. Sia $V=o$ una equazione di un grado qualunque che abbia tutte le radici ineguali e V' la derivata di V. Si operi come quando si cerca il massimo divisore comune tra V e V'; solamente avvertendo a cambiare il segno a tutti i resti, allorchè servono successivamente di divisori; e sieno V'', V''' ec. . . . questi resti consecutivi coi segni cambiati sino al resto numerico $V^{(r)}$ avremo il teorema seguente.

Che sostituendo nelle funzioni successive V, V,' V,'' V,''' . . . $V^{(r)}$ invece di x due numeri qualunque a e b positivi o negativi, il più piccolo dei quali è a, il numero delle radici reali della equazione $V=o$ contenute tra a e b è uguale all'eccesso delle variazioni di segno alle quali dà luogo la serie V, V,' V,'' V,''' . . . $V^{(r)}$ sostituendovi a invece di x, su quello che si ottengono sostituendovi b.

§ 14. *Eliminazione*.

Eliminare le incognite vuol dire trasformare un sistema di equazioni contenente più incognite in un altro da cui alcune delle incognite siano sparite (pag. 57).

Quando il numero delle equazioni è uguale a quello delle incognite, l'elimina-

zioni di tutte le incognite meno una conduce in generale ad una equazione finale contenente una sola incognita. Il grado di questa equazione è uguale al più al prodotto dei gradi delle equazioni contenute nel sistema.

Si abbiano due equazioni e due incognite: se una delle equazioni contiene una delle incognite x al primo o al secondo grado soltanto; si risolverà per rapporto a questa incognita e al sostituirà il valore così trovato che sarà espresso in funzione di y nell' altra equazione. La quale sarà in tal modo ridotta a non contenere che y soltanto, e risoluta darà i valori di y. I valori corrispondenti di x si otterranno sostituendo i valori trovati di y nell' equazione dalla quale abbiamo avuto x espresso per funzione di y.

In generale quando si hanno due equazioni numeriche di grado qualunque tra due incognite x ed y, per ottenere i valori di y, si potrà cercare il più gran comun divisore tra queste due equazioni ordinate per rapporto alle potenze discendenti della incognita x, si arriverà ad un resto indipendente da x e si uguaglierà a zero questo resto, che non contiene altro che la incognita y. Così avremo da risolvere un'equazione in y soltanto, le radici della quale ci daranno i valori di y capaci di soddisfare alle equazioni proposte.

Se i coefficienti delle equazioni sono algebrici sarà meglio operare nel modo che segue.

METODO DI ELIMINAZIONE PER MEZZO DELLE FUNZIONI SIMMETRICHE. Considerando due equazioni dei gradi m ed n respettivamente, che contengono due incognite x ed y

$$(1)\quad x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_{m-1} x_1 + p_m = o$$

$$(2)\quad x^n + q_1 x^{m-1} + q_2 x^{n-2} + \ldots + q_{n-1} x + q_n = o$$

dove $\quad p_1, p_2$ ec. q_1, q_2 ec.

sono delle funzioni di y del grado 1, 2, ec. designando per $a, b \ldots l$ le radici della (1) che dipendono da y, e sostituendo questi valori invece di x nella seconda avremo

$$a^n + q_1 a^{n-1} + q_2 a^{n-2} + \ldots + q_{n-1} a + q^n$$

$$b^n + q_1 b^{n-1} + q_2 b^{n-2} + \ldots + q_{n-1} b + b_n^*$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$l^n + q_1 l^{n-1} + q_2 l^{n-2} + \ldots + q_{n-1} l + q_n$$

moltiplicando insieme questi resultati e designando il loro prodotto per V, sarà V una funzione simmetrica ed intera delle radici dell' equazione (1) e ponendo $V = o$ si avrà l' equazione finale dalla quale sarà stato eliminato x. Questa equazione finale è di uno grado uguale al prodotto dei gradi delle due equazioni (1) e (2).

Considerando più equazioni

$$(1)\ x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m = o$$

$$(2)\ x^n + q_1 x^{n-1} + q_2 x^{n-2} + \ldots + q_n = n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(h)\ x^v + t_1 x^{v-1} + t_2 x^{v-2} + \ldots - t_v = n$$

dove $\quad p_1, p_2{}^m \ldots, q_1, q_2{}^m \ldots, r_1, r_2 \ldots$

sono funzioni intere di y, z ec. e chiamando $a, b, c \ldots l$ le radici della (1) le quali dipendono da $y, z, \ldots$ e dalle altre incognite se ve ne sono; introducendole ciascuna nelle 2 .... (h) si avrà successivamente

$$a^n + q_1 a^{n-1} + q_2 a^{n-2} + \ldots + q_n = o$$
$$b^n + q_1 b^{n-1} + q_2 b^{n-2} + \ldots + q_n = o$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$l^n + q_1 l^{n-1} + q_2 l^{n-2} + \ldots + q_n = o$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a^v + t_1 a^{v-1} + t_2 a^{v-2} + \ldots + t_v = o$$
$$b^v + t_1 b^{v-1} + t_2 b^{v-2} + \ldots + t_v = o$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$l^v + t_1 l^{v-1} + t_2 l^{v-2} + \ldots + t_v = o$$

moltiplicando insieme ciascune di questi risultati, e rappresentando per $V \ldots V_{h-1}$ i loro prodotti si avranno $V = o \ldots V_{h-1} = o$ che sono l'equazioni finali risultanti dalla eliminazione di x tra le proposte. Queste sono funzioni simmetriche ed intere delle radici della (1), e contengono razionalmente i coefficienti delle (2) .... (h); quindi si possono esprimere razionalmente per i coefficienti delle (1) (2) .... (h).

§ 15. *Trasformazione delle equazioni, risolvente.*

TRASFORMAZIONE DELLE RADICI DELLE EQUAZIONI. Per accrescere di una quantità h tutte le radici della equazione proposta, basta porvi $y - h$ invece di x. Ciò corrisponde a eliminare x tra

$$y = x + h$$

ossia tra

$$y - h - x = o$$

e la proposta che ha per radici $a, b, c \ldots l$ il che si fa prendendo

$$y - h - a$$
$$y - h - b$$
$$\ldots\ldots$$
$$y - h - l$$

come abbiamo visto di sopra, moltiplicando ed uguagliando il prodotto a zero.

Ora si vede che

$$(y-h-a)(y-h-b)\ldots(y-h-l)$$

si deduce dalla proposta

$$(1)\ f(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-l) = o$$

cangiandovi

$$x \text{ in } y - h.$$

Per trasformare l'equazione (1) in un altra che abbia tutte le radici uguali e di segno contrario a quelle della proposta si porrà $-y$ invece di x.

Per moltiplicare tutte le radici di una equazione per h, si pone $\frac{y}{h}$ invece di x.

Se si tratta di trovare una equazione che abbia per radici le differenze tra ciascuna delle radici di una equazione data $f(x) = o$ e tutte le altre, bisognerà eliminare x tra le due equazioni

$$f(x) = o$$
$$f'(x) + \frac{y}{1.2} f''(x) + \frac{y^2}{1.2.3} f'''(x) + \ldots = o.$$

Se l'equazione proposta è del grado m, l'equazione delle differenze è del grado

$m\,(m-1)$ e non contiene che le potenze pari di y.

I particolari relativi a questa operazione ci condurrebbero troppo in lungo.

Se nella equazione delle differenze si sostituisce z invece di y^2 l'equazione in z prende il nome di equazione dei quadrati delle differenze.

Prendendo il limite inferiore delle radici positive dell'equazione in z, la radice quadrata di questo limite è una quantità più piccola della più piccola differenza tra le radici della equazione data.

Quando l'equazione de' quadrati delle differenze non ha che variazioni di segni, l'equazione proposta ha tutte le sue radici reali, quando la prima ha delle permanenze la seconda ha delle radici immaginarie; il numero delle coppie di radici immaginarie non può esser maggiore del numero delle permanenze dell'equazione dei quadrati delle differenze.

RISOLVENTE. Chiamando

$$x_0 \,,\, x_1 \,,\, x_2 \ldots x_{m-1}$$

le radici della proposta, si cerchi una trasformata la quale abbia le sue radici della forma

$$V = \varphi x = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \ldots + \alpha^{m-1} x_{m-1}\Big)^m$$

e si rappresentino con

$$V_0 \,,\, V_1 \,,\, V_2 \,,\, \ldots \, V_{m-1}$$

i valori che prende φx quando si pone invece di α una qualunque delle radici dell'equazione

$$(2)\quad y^m - 1 = 0$$

le quali si rappresentano con

$$1 \,,\, \alpha_1 \,,\, \alpha_2 \,,\, \ldots \,,\, \alpha_n \,\ldots\, \alpha_{m-1}$$

Sarà allora

$$x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_i + \ldots + x_{m-1} = \sqrt[m]{V_0}$$

$$x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_1^2 x_2 + \ldots + \alpha_1^n x_n + \ldots + \alpha_1^{m-1} x_{m-1} = \sqrt[m]{V_1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_0 + \alpha_{m-1} x_1 + \alpha^2_{m-1} x_2 + \ldots + \alpha^n_{m-1} x_n + \ldots \alpha^{m-1}_{m-1} x_{m-1} = \sqrt[m]{V_{m-1}}$$

dalle quali si avrà

$$x = \frac{\sqrt[m]{V_0} + \alpha_1^n \sqrt[m]{V_1} + \alpha_2^n \sqrt[m]{V_2} + \ldots + \alpha^n_{m-1} \sqrt[m]{V_{m-1}}}{m}$$

La trasformata in V chiamasi la *risolvente*.

Se dunque V rappresenta una funzione delle radici della proposta, la quale facendo in queste radici tutte le permutazioni possibili prenda μ valori differenti

$$V_1 \,,\, V_2 \,,\, V_3 \,\ldots\, V_\mu$$

l'equazione $\quad (V-V_1)(V-V_2)(V-V_3)\ldots(V-V_\mu) = 0$

dalla quale dipende il valore cercato di V sarà del grado μ e si potrà mettere sotto la forma

$$V^{\mu} + P_1 V^{\mu-1} + P_2 V^{\mu-2} + \ldots + P_{\mu} = 0$$

dove

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_{\mu} = -P_1$$
$$V_1 V_2 + \ldots + \quad = P_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$V_1 V_2 + \ldots + V_{\mu} = \pm P_{\mu}$$

Le quantità

$$P_1 , P_2 \ldots P_{\mu}$$

saranno funzioni simmetriche di

$$V_1 , V_2 \ldots V_{\mu}$$

ed in conseguenza delle radici della proposta; per cui si potranno calcolare per mezzo dei coefficienti della proposta nel modo indicato § 11.

E se il grado μ è minore del grado m della proposta, le radici di questa si potranno esprimere in funzione delle radici di una equazione di grado inferiore. Ciò non è possibile in generale nei gradi superiori al quarto, altro che per una classe di equazioni che consideriamo nel seguente paragrafo.

§ 13. *Equazioni e congruenze binomie.*

Se a_n è radice della (2) $y^m = 1$ differente dall'unità, ed m è un numero primo, le potenze

$$a_n \; a_n^{\,2} \ldots a_n^{\,m-1}$$

sono tutte differenti tra loro.

Queste potenze rappresentano tutte le radici della (2) poichè essendo $a_n^{\,m} = 1$ sarà ancora $a_n^{\,2m} = 1$, $a_n^{\,3m} = 1$ ... ec.

Se m è un numero composto il quale abbia con n un massimo comune divisore θ, le radici comuni alle due equazioni binomie

$$y^m = 1, \; y^n = 1$$

saranno radici anco della equazione

$$y^{\theta} = 1$$

poichè ponendo $m = nq + r$ e cercando il divisore comune θ; si avrà

$y^m = y^{nq+r}$, ed essendo $y^n = 1$ sarà $y^{nq} = 1$.

Quindi $y^r = 1$

seguitando a prendere i resti successivi $r_1 , r_2 \ldots$ si arriverà al resto θ ed alla equazione $y^{\theta} = 1$

le potenze successive di una qualunque delle radici di questa equazione saranno radici anco della equazione (2), ma queste potenze non daranno più di θ radici differenti della proposta.

Se una radice a_n è tale che le potenze successive

$$a_n \; a_n^{\,2} \ldots a_n^{\,m-1}$$

sieno tutte differenti, queste potenze daranno tutte le radici della proposta ed a_n non potrà sodisfare a nissuna equazione $y^{\theta} = 1$ dove θ sia minore di m. Queste radici si dicono primitive.

Passiamo alle radici delle congruenze binomie. Si chiamano radici di una congruenza

$$f(y) \equiv 0 \pmod{p}$$

i valori di y compresi tra 0 e p che rendono $f(x)$ divisibile per p. Se m è un numero primo segue dal teorema di Fermat che la congruenza

$$y^{m-1} - 1 \equiv 0 \pmod{m}$$

ha per radici

$$1, 2, 3 \ldots\ldots m-1$$

Se v è una radice della congruenza (3) $y^h \equiv 1 \pmod m$ ed h è un numero primo, le potenze

$$v\ ,\ v^2 \ldots v^{h-1}$$

danno residui secondo il modulo m tutti differenti tra loro.

Queste potenze rappresentano tutte le radici della (3).

Se h è un numero composto il quale abbia con n un massimo comune divisore θ, le radici comuni alle due congruenze binomie

$$y^h \equiv 1 \pmod m\ ,\ y^n \equiv 1 \pmod m$$

sono egualmente radici della congruenza

$$y^\theta \equiv 1 \pmod m$$

Le potenze successive di una qualunque di queste radici, o loro residui sono radici anco della congruenza

$$y^{m-1} \equiv 1 \pmod m$$

ma queste potenze non ne possono dare più di θ radici differenti.

Se un numero v è tale che le potenze

$$v^1\ v^2 \ldots v^{m-1}$$

dieno residui tutti differenti, questi residui saranno tutte le radici di questa congruenza, cioè tutti i numeri minori di m, e v non potrà sodisfare a niasuna congruenza

$$y^\theta \equiv 1 \pmod m$$

dove θ sia minore di $m-1$; v dicesi radice primitiva del modulo m.

Sia ora v una radice primitiva del modulo m.

Le radici della equazione

$$x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + 1 = \frac{x^m - 1}{x-1} = 0$$

si potranno esprimere con

$$(h)\quad x\ ,\ x^v\ ,\ x^{v^2}\ ,\ \ldots\ x^{v^{m-2}}$$

e si avrà $x^{v^{m-1}} = x$ ed $x^{v^{m-1}+k} = x^{v^k}$

Indicando con α una radice qualunque della equazione

$$y^{m-1} = 1$$

potremo porre

$$V = \psi(x) = \left(x + \alpha\, x^v + \alpha^2\, x^{v^2} + \ldots + \alpha^{m-2}\, x^{v^{m-2}}\right)^{m-1}$$

e sarà V una funzione simmetrica delle radici della proposta; poichè sostituendo x^{v^q} invece di x si avrà

$$V_q = \psi\left(x^{v^q}\right) = \left(x^{v^q} + \alpha\, x^{v^{q+1}} + \ldots + \alpha^{m-1-q}\, x + \alpha^{m-q} x^v + \ldots + \alpha^{m-2}\, x^{v^{q-1}}\right)^{m-1}$$

$$= \left(\alpha^{m-1-q}\left(x + \alpha\, x^v + \alpha^2\, x^{v^2} + \ldots + \alpha^{m-2}\, x^{v^{m-2}}\right)\right)^{m-1}$$

ed osservando che

$$\alpha^{m-1} = \left(\alpha^{m-1-q}\right)^{m-1} = 1$$

sarà ancora $\psi\, x = \psi\, x^{v^q}$

Onde apparisce che questa funzione non cambia sostituendo invece di x una qualunque delle radici (h) perciò $\psi\, x$ è una funzione simmetrica la quale può essere

espressa razionalmente pei coefficienti della proposta; e questa può essere dunque risoluta coi metodi di trasformazione di sopra accennati.

In generale un' equazione del grado m $f(x) = o$ le cui radici sono legate tra loro dalla relazione $x' = \theta\, x$, dove $\theta\, x$ indica una funzione razionale di x, potrà essere risoluta col metodo stesso ponendo

$$\theta(\theta x) = \theta^2 x,\ \theta(\theta^2 x) = \theta^3 x \text{ ec.}$$
$$V = \psi(x) = \left(x + \alpha\,\theta\, x + \alpha^2\,\theta^2 x + \ldots + \alpha^{m-1}\,\theta^{m-1} x\right)^m$$

e cercando i valori di V che saranno tutti funzioni simmetriche della proposta.

§ 46. *Fatti diversi relativi all'algebra.*

Soluzione dei problemi. Essa consiste in due parti: 1.° Nel modo di porre in equazione il problema proposto 2.° nel risolvere l'equazione alla quale si arriva.

La prima non può sottomettersi ad alcuna regola fissa, talora l'enunciato del problema somministra le equazioni immediatamente, tal altra bisogna discutere le condizioni di questo enunciato capaci di somministrarcele; o qualche volta infine non si tratta di tradurre in linguaggio algebrico queste condizioni, ma altre che debbonsi riguardare come conseguenze delle prime. Lacroix ci da su tal proposito il precetto, seguente, che bene applicato condurrà sempre alle equazioni dalle quali dipende la soluzione del problema. « Si riguardi il problema come risolnto, si operi sulle quantità cognite rappresentate da numeri o da lettere, e sulle incognite rappresentate sempre da lettere indicando sopra di esse li stessi calcoli, ed eseguendo li stessi ragionamenti, che sarebbero necessari per verificare i valori della incognita se questi fossero dati ».

La seconda parte che riguarda la risoluzione delle equazioni cui siamo giunti, dipende dalle regole esposte nei precedenti paragrafi.

È necessario osservare che i diversi metodi dati per la risoluzione delle equazioni, possono condurci a dei valori negativi per le incognite. Questi valori sodisfano sempre alle equazioni, ma possono non convenire al problema secondo è stato posto.

Nei problemi di primo grado un valore delle incognite negativo indica un vizio nel senso delle condizioni dell' enunciato, o almeno in una delle equazioni che ne è la traduzione algebrica. Questo valore astrazion fatta dal segno può riguardarsi come la risposta ad un problema, il cui enunciato non differisce da quello del problema proposto, se non perchè alcune quantità invece di additive debbono considerarsi nell' enunciato come sottrattive o viceversa.

Se il vizio esiste in una equazione e non nell' enunciato, le soluzioni negative servono a rettificare il punto di vista sotto il quale sono stato considerate le condizioni del problema.

Particolari istorici. L'origine dell' algebra è recente in paragone di quella dell'aritmetica. Diofante d' Alessandria, che viveva verso la metà del quarto secolo dell'era nostra, è l' autore del più antico trattato di algebra che sia giunto fino a noi. Questo trattato si componeva di tredici libri dei quali non ne sono rimasti che sei. Non è una esposizione elementare dei principii della scienza, ma una collezione di questioni difficili sui quadrati, sui cubi e sulle proprietà dei numeri.

I problemi di Diofante suppongono la risoluzione delle equazioni determinate di primo e secondo grado, e cognizioni estese sull' analisi indeterminata. Per dare un' idea del genere delle questioni più semplici delle quali Diofante siasi occupato citeremo il suo epitaffio che trovasi nella Antologia Greca » Diofante passò nell'infanzia il sesto del tempo che visse, e il dodicesimo nell' adolescenza: maritatosi passò il settimo della sua vita più cinque anni, avanti di avere un figlio, a cui sopravvisse quattro anni, e che visse la metà del padre. A che età morì Diofanto? Un' equazione di primo grado basta per trovare la durata della vita di questo geometra, che è 84 anni.

Non bisogna credere del resto che nulla si trovi in Diofante, che assomigli al meccanismo delle operazioni algebriche come si pratica da noi. Rappresenta l'incognita con l'abbreviazione ος, finale della parola greca αριθμος con la quale la designa. Ma non adopera nè le lettere dell'alfabeto, nè i segni delle diverse operazioni, eccettuato il segno della sottrazione che è una ψ poco troncata.

Leonardo Fibonacci pisano prendendo dagli arabi la più gran parte delle cognizioni di algebra, che essi probabilmente avevano attinte dai libri greci e da Diofante, l'ha fatta conoscere ai cristiani di Occidente. L'algebra occupa il 15.° capitolo del suo *abacus* composto nel 1202, e pubblicato recentemente dal Libri nella sua *Histoire des sciences mathématiques en Italie*.

È possibile che gli Arabi abbiano preso molto dall'India dove l'algebra era coltivata da tempo antichissimo. Due monumenti dell'algebra Indiana sono stati pubblicati in Inglese, non sono ancor quaranta anni, Bhascara Acharya autore di uno di essi viveva nel dodicesimo secolo; e Brahmegupta, autore dell'altro viveva nel settimo secolo dell'era cristiana. Se queste opere fossero venute in Europa sessanta od ottanta anni avanti, avrebbero potuto affrettare i progressi dell'algebra anno vivente Eulero. Brahmegupta cita spesso Aryabhatta; gli scritti di questo sono per sventura perduti: sembra vivesse in epoca non posteriore a quella di Diofante.

Il nome Algebra devesi agli Arabi che chiamavano questa scienza *el-djaber el-mogabelah*, nome il cui significato corrisponde a quello di scienza delle *ristaurazioni* e delle *ripristinazioni*.

Questo nome era fondato sulla regola per mezzo della quale si operava il passaggio o *ripristinazione* di una quantità che era negativa, e diveniva positiva trasportata o ripristinata nell'altro membro della equazione.

In chirurgia nel medio evo algebra significava l'atto di ristaurare o di rimettere le membra fratturate; e nelle lingue portoghese e spagnola *algebriste* significa tuttavia chirurgo.

Dopo Leonardo pisano gli Italiani Luca Paciolo, Tartaglia, Girolamo Cardano, Scipione Ferrari, fecero fare tali progressi alla teoria delle equazioni risolvendo quelle terzo e del quarto grado, che li sforzi dei grandi geometri venuti dopo di loro appena hanno potuto superarli, e si arrestarono solo davanti a delle difficoltà che le risorse dell'analisi moderna non hanno potuto vincere. Il che è tanto più maraviglioso, perchè si servissero raramente di lettere per designare qualcuna delle quantità sulle quali operavano, senza il soccorso dei segni e delle regole dell'algebra per combinarle nelle diverse operazioni e trasformazioni a cui danno luogo i calcoli; e la potenza della mente loro tenesse luogo della notazioni e degli aiuti dell'analisi.

I segni $+$, $-$, $\surd$ si trovano per la prima volta in un'opera di Cristoforo Rudolph algebrista tedesco edita nel 1522.

Le incognite furono rappresentate per lettere e le potenze loro con dei segni che hanno qualche analogia con gli esponenti dal tedesco Stifelio, nella sua *Aritmetica integra* pubblicata a Nuremberg nel 1544, e da Peletier e da Buteon francesi verso il 1558. Questi esponenti però non sono cifre nè possono essere sottoposti al calcolo. La notazione degli esponenti si trova in una opera pubblicata nel 1520 e poi nel 1538 intitolata; *L'Arismethique nouvellement composée par maistre Estienne de la Roche dict Villefranche, natif de Lyon*. L'autore vi rappresenta la potenza 2ª 3ª 4ª ec. di un numero, di 12 per esempio nel modo seguente $12^1 \cdot 12^2 \cdot 12^3$ ec., e di più applica li stessi esponenti a rappresentare le radici servendosi del segno R invece di $\surd$ così scrive $R^2 12$ $R^3 12$ $R^4 12$. Questa aritmetica comprende la *regola della cosa* cioè l'algebra. È questo il più antico trattato di algebra che sia comparso in Francia, ed è notevole a cagione dell'epoca che sia scritto in Francese. L'autore vi cita un'opera sull'algebra anteriore al 1520 di maestro Nicolas Chuquet. Record geometra inglese a immaginato il segno $=$ nel 1552.

Queste notazioni erano un passo verso il calcolo delle quantità algebriche rappresentate generalmente per lettere, ma non stabilivano le regole di questo calcolo.

Adriano Romano (Van Rœmen) di Louvain si servì di lettere nel 1597 non solo come una breve designazione delle quantità sulle quali aveva da ragionare, il che tanti altri avevano fatto innanzi a lui, ma nella idea filosofica di creare una scienza matematica universale, che sotto forma di simboli astratti e generali abbracciasse il calcolo di tutte le quantità di ogni specie.

Romano vide questo concetto attuato da Viete, di cui divenne l'ammiratore e l'amico, nel suo trattato dell' Algebra speciosa. Viete può riguardarsi come il creatore del calcolo algebrico moderno. Nato a Footenay le Comte nel 1540 morto nel 1603. Francesco Viete imaginò di rappresentare con simboli le operazioni effettuate non più sui numeri ma sulle lettere, e cercò le espressioni e le formule algebriche, e l'arte delle trasformazioni che risparmia dei ragionamenti sì lunghi e sì penosi. Così egli dette alla sua algebra il nome di *speciosa*, perchè rappresenta con simboli il processo del ragionamento che conduce alla soluzione delle questioni algebriche. Gli algebristi italiani avevano da molto tempo risolute le più difficili tra queste questioni; Viete rappresentò queste soluzioni con formule generali, ed applicò l'algebra alla costruzione dei problemi di geometria.

Descartes trovò il calcolo degli esponenti, e l'applicazione dell' algebra alla teoria delle curve.

Oughtred nato nel 1573 è il primo che siasi servito del segno $\times$ nella moltiplicazione.

Alberto Gerard in Fiandra ed Harriot in Inghilterra si illustrarono al principio del secolo decimo settimo con importanti scoperte. Si debbono a quest'ultimo i segni di disuguaglianza $>$ e $<$.

Descartes, Fermat, Wallis, Galileo, Neper, Kleper, Huygens, Newton, Leibnitz, i Bernoulli, Moivre, Stirling, Côtes, Lambert, Waring, Maclaurin, Euler, d' Alembert, Condorcet, Lagrange, Vandermonde, Legendre, Laplace, e molti altri illustrarono il secolo decimo settimo, e decimo ottavo. Le ricerche delle quali abbiamo dato un cenno nel § 45 si debbono a Gauss = *Disquisitiones arithmeticae* = ed ai geometri del secolo nostro, tra i quali primo egli ha mostrato agli altri la via. Gran parte di questi particolari è tolta dai bei lavori di Chasles sulle origini dell'Algebra (*Comptes rendus de l' Acad. des Sciences, t. XII, XIII e XIV.*)

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE. Le opere di algebra elementare più conosciute nell'insegnamento, sono quelle di Bezout, di Bourdon, d' Euler, di Lacroix, di Lefebure de Fourcy, di Mayer e di Choquet, di Reynaud. L'algebra superiore di Serret, e l'analisi algebrica di Cauchy contengono ciò che vi è di più generale sulla teoria delle funzioni algebriche.

Il nuovo metodo di Sturm per la risoluzione numerica delle equazioni, è esposto nelle più recenti edizioni dei libri di Bourdon, Lefebure de Fourcy, Mayer e Choquet, Reynaud ec.

L'algebra di Lacroix è adattatissima a dare delle idee sane sui principii e le operazioni elementari; ed è come tutte le opere dello stesso autore piena di chiarezza e di eleganza. Il libro d'Euler arricchito delle note di Lagrange sarà sempre considerato come un capo d' opera. Gran parte ne occupa l'analisi indeterminata; ma non è più all' altezza della scienza per ciò che riguarda la risoluzione delle equazioni determinate. L'algebra di Lhuilier contiene molti problemi curiosi.

I problemi e gli esercizi per i calcoli algebrici di Ritt sono utili a chi apprende l'algebra.

Le collezioni accademiche e i giornali scientifici contengono i lavori, il cui insieme costituisce la scienza algebrica nello stato attuale.

III. GEOMETRIA

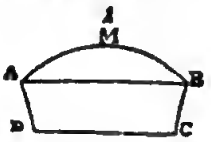
§ 1. *I principii*.

La Geometria è una scienza che ha per oggetto la misura dell' estensione.

Si considerano nell' estensione tre dimensioni luoghezza, larghezza e altezza o profondità.

La linea è una lunghezza senza larghezza; le estremità di una *linea* si chiamano *punti* come si chiama punto il luogo dove due linee si incontrano.

La linea retta AB (fig. 1) o semplicemente la retta è il più corto camino da un punto ad un altro. Due punti A e B bastano per determinare la posizione di una linea retta.



Le linee rette si disegnano sulla carta con la riga. Ci si accerta che la riga è dritta traguardandola lo scorcio dall' uno dei capi con un occhio solo. In questo modo le minime deviazioni divengono sensibili.

I falegnami ed ebanisti segnano le linee rette con una corda tesa e tinta di creta, pizzicandola verticalmente e lasciandola poi ricadere ad un tratto sul pezzo da segnare.

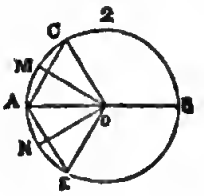
Una linea spezzata BCDA è composta di linee rette terminate ai punti B C D A.

Dicesi superficie ciò che ha lunghezza e larghezza senza altezza o grossezza.

Il piano è una superficie sulla quale si può applicare in tutti i sensi una linea retta. Si riconosce se una superficie è piana portando una riga in tutti i sensi sopra di questa, ed osservando se in tutte le posizioni la riga si applica interamente sulla superficie.

Ogni superficie che non è nè piana, nè composta di superfici piane, è una superficie curva.

La più semplice delle linee curve esistenti in un piano è la circonferenza, (fig. 2) la quale ha tutti i suoi punti



ugualmente distanti da un punto interno O che dicesi centro.

Si chiama raggio ogni retta OA condotta dal centro O a un punto qualunque A della circonferenza, e diametro ogni retta AB che passando per il centro termina da una parte e dall' altra alla circonferenza.

Tutti i raggi sono uguali tra loro, tutti i diametri sono uguali tra loro e doppii del raggio. Non bisogna confondere la circonferenza che è una linea col cerchio che è una superficie circoscritta da questa linea.

Chiamasi arco una porzione qualunque AMC della circonferenza; la retta AC che riunisce le estremità A e C dell' arco dicesi corda.

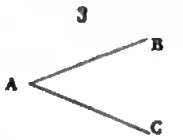
Lo spazio compreso tra l' arco e la corda dicesi *segmento* di cerchio.

Lo spazio COB compreso tra l' arco e i due raggi dicesi settore.

Il compasso è l' istromento col quale si descrivono gli archi di circonferenza e si prendono le lunghezze sul disegno.

Solido o corpo è ciò che riunisce le tre dimensioni dell' estensione.

Due linee AB AC che si incontrano formano un angolo BAC, il quale (fig. 3) è

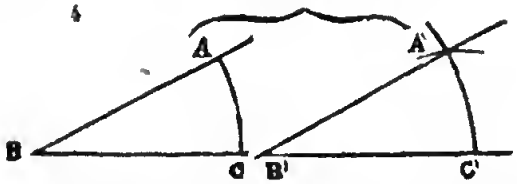


lo spazio indefinito compreso tra esse.

Le rette AB AC dicensi i lati dell' angolo, il punto A dicesi il vertice.

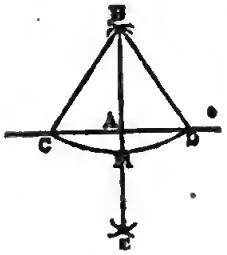
Per costruire un angolo A′B′C′ uguale ad un angolo dato ABC; facendo centro in B con un apertura di compasso a piacere si descrive l'arco AC, che incontra i lati dell'angolo in A e C; con la stessa apertura di compasso facendo centro in B′ si descrive un secondo arco che incontra B′C′ in C′, quindi facendo centro in C′ con apertura di compasso uguale a CA, si descrive un arco che intersecherà in A′, si congiungerà B′ con A′ e si avrà A′B′C′ = ABC (fig. 4).

4



Una retta AB che incontra una retta DC (fig. 5) in modo che gli angoli adiacenti

5



BAC, BAD che forma da una parte e dall'altra della retta DC siano eguali, dicesi perpendicolare alla CD; essa allora non pende più sopra l'una parte che su l'altra della DC.

Ognuno di questi angoli prende il nome di angolo retto. Gli angoli retti sono tutti uguali tra loro. Per condurre per un punto dato A una perpendicolare alla retta CD, si prendono con il compasso distanze eguali AC, AD da una parte e dall'altra del punto A, si descrivono dai punti C e D come centri con una apertura di compasso sufficiente due archi che si tagliano in B, e la retta che congiunge il punto B col punto A è la perpendicolare cercata.

È evidente che i due cerchi che hanno il centro in C e D si incontrano anco in un punto E al disotto di CD, e che la perpendicolare deve passare per B, A ed E.

Se si trattasse di abbassare da un punto B una perpendicolare sulla retta CD, si descriverebbe dal punto B come centro con un' apertura di compasso sufficiente un arco CMD, che taglierebbe la retta in C e D, e dai punti C o D come centri con la stessa apertura di compasso si condurrebbero due archi, che si taglierebbero in B ed E. La retta BE sarebbe la perpendicolare cercata.

La costruzione stessa serve a condurre una perpendicolare sul mezzo di una retta data CD, o a dividere questa retta in due parti eguali. Le perpendicolari ad una retta data si conducono ordinariamente con la squadra (fig. 6), che si fa scorrere sopra

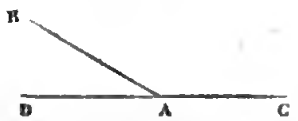
6

una riga fissa. Uno dei lati AC della squadra appoggia sulla riga, il lato BC che fa angolo retto con quello serve a tracciare le perpendicolari. Si verifica se la squadra è esatta, girando la squadra finchè il lato BC appoggi sulla riga, e tracciando con AC delle perpendicolari, che dovranno coincidere con le prime.

Le perpendicolari sul terreno si conducono adattando i traguardi sopra i lati di una squadra (vedi squadro degli agrimensori § 7).

Una linea AB (fig. 7) che ne incontra

7

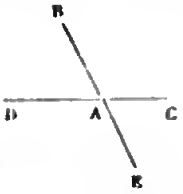


una altra CD fa due angoli adiacenti BAC BAD la cui somma è uguale a due retti.

Il più piccolo di questi chiamansi acuto il più grande ottuso. Questi due angoli si chiamano supplementi l'uno dell'altro. Il supplemento di un angolo è dunque la differenza tra quest'angolo e due retti

Quando due rette BE, CD si tagliano (fig. 8) gli angoli BAD, CAE che sono op-

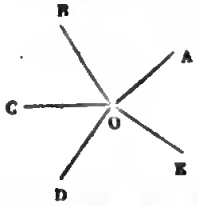
8



posti al vertice sono uguali.

La somma (fig. 9) di tutti gli angoli

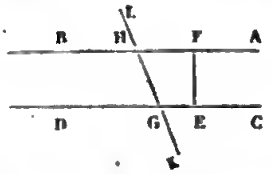
9



AOB, BOC, COD, DOE, EOA, che fanno le rette OA, OB, OC, OD, OE le quali concorrono nel punto O è uguale a quattro retti.

Due rette si dicono parallele quando essendo poste nello stesso piano non possono incontrarsi a qualunque distanza si prolunghino. Due parallele incontrate da una secante GH (fig. 10) fanno due angoli

10



l'uno esterno LHB l'altro interno LGD uguali.

Sono pure uguali gli angoli AHG, LGD che si chiamano alterni interni; e gli angoli KGC, LHB che si chiamano alterni esterni.

In generale gli angoli in H e in G sono uguali i quattro acuti fra loro e i quattro ottusi fra loro.

Un angolo acuto e uno ottuso sommano due retti nella figura 10, come nelle figure 7 e 8, e ciò è reso sensibile nella costruzione seguente.

Facciasi scorrere (fig. 11) una squadra

11

mobile, appoggiando un lato di essa contro una riga fissa. Osservando le posizioni successive, nelle quali ogni lato della squadra si trasporta parallelamente a se stesso, si vedrà che la squadra serve a tracciare delle parallele. L'angolo che un lato della squadra fa con il lato che appoggia sulla riga, è l'angolo costante che le parallele tutte fanno colla secante rappresentata dalla costola della riga.

La squadra prenda talora la forma di T, uno dei lati scorre appoggiato sempre sopra una linea fissa.

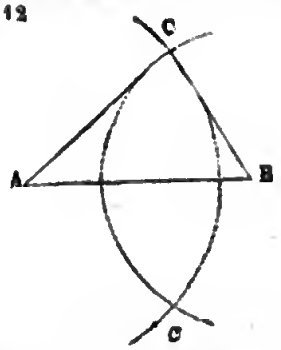
Triangoli e poligoni. Chiamasi figura piana una porzione di piano terminata da linea. Quando tutte le linee del contorno sono rette questa figura chiamasi rettilinea o poligono.

Il più semplice di tutti i poligoni è il triangolo il quale ha tre lati. Dicesi *equilatero* se tutti tre i lati sono uguali; *isoscele* se due soli lati sono uguali, *scaleno* se tutti i lati sono disuguali.

Il triangolo ha pure tre angoli, dicesi rettangolo se ha un angolo retto, il lato opposto all'angolo retto chiamasi ipotenusa; la fig. 6 è un triangolo rettangolo.

Un triangolo è determinato quando di sei cose, tre angoli e tre lati, ne sono

12



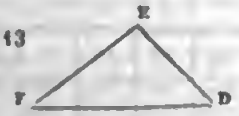
conosciute tre; tra le quali almeno un la-

to. Dati tre lati si descrive il triangolo facendo centro alle due estremità A e B di uno di essi (fig. 12), e descrivendo due cerchi con raggi uguali respettivamente agli altri due lati AC e BC.

Dati due lati di un triangolo e l'angolo compreso si descrive il triangolo, facendo un angolo uguale all'angolo dato (fig 4), e prendendo sulle linee che comprendono quest'angolo due lunghezze respettivamente uguali ai lati del triangolo dato.

Dati due lati DE ed EF (fig 13) oppo-

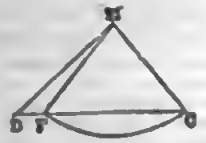
13



sto all'angolo D, si descrive il triangolo, prendendo sopra una delle linee che comprendono l'angolo D una porzione DE uguale al lato dato, e facendo centro in E con un raggio uguale ad EF, per descrivere un arco di cerchio che taglia l'altro lato FD nel punto F, e determina il triangolo EDF.

Perchè il problema sia possibile è necessario che la perpendicolare abbassata sopra FD dal punto E sia più corta del lato EF. Se EF è più lungo di questa perpendicolare ma più corto di ED (fig. 14)

14



il problema ammette due soluzioni DEF e DEC.

Essendo dati due angoli ed un lato descrivere il triangolo. Se i due angoli sono adiacenti al lato dato, si conducono all'estremità dell'lato dato due linee che facciano con questo angoli uguali agli angoli dati, e l'incontro di quelle linee determina il triangolo. Se uno degli angoli è opposto al lato dato si troverà il terzo angolo e si compirà la costruzione come sopra.

Per trovare il terzo angolo (v. prob. VII pag. 104) bisogna osservare che la somma dei tre angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti; la conseguenza di ciò due triangoli i quali hanno due angoli uguali hanno uguale anco il terzo.

Questa proposizione dipende da quelle relative agli angoli fatti dalle parallele con la secante, ed insieme con esse è fondamentale in geometria piana, dove la misura degli angoli determina la posizione delle rette, e questa in certi casi le relazioni di somiglianza delle figure.

I particolari relativi alla misura degli angoli sono esposti al § 2; i seguenti contengono la misura delle superficie e i rapporti delle figure fino al § 6, nel quale sono raccolti i problemi relativi al disegno delle figure geometriche. A questi fanno seguito i problemi di geometria pratica, e la descrizione degli istrumenti ad essa relativi, considerati nei § successive; i quali mostrano in atto le applicazioni delle verità geometriche, e fanno strada alla considerazione delle proprietà delle figure nello spazio.

Avanti di passare al § 2 aggiungiamo alcune cose riguardanti i quadrilateri.

Un quadrilatero che ha i lati opposti paralleli (fig. 15) dicesi *parallelogram-*

15

mo. In questa figura gli angoli e i lati opposti sono uguali.

Si chiama *losanga* (fig. 16) un paralleloi-

16

grammo che ha i quattro lati uguali.

Il *rettangolo* (fig. 17) è un paralleloi-

17

grammo che ha gli angoli retti.

Il *quadrato* (fig. 18) è un rettangolo

18

che i lati uguali, o se vuolsi una losanga che ha gli angoli retti.

Digitized by Google

Si chiama diagonale ogni retta che unisce i vertici di due angoli non adiacenti di un poligono.

In ogni parallelogrammo le diagonali si tagliano scambievolmente in parti uguali (fig. 15). Nella losanga si tagliano ad angolo retto (fig. 16). Nel rettangolo sono uguali.

Si chiama *trapezio* (fig. 19) un quadri-

latero nel quale due lati soltanto sono paralleli.

TAVOLA DELLE CORDE PER UN RAGGIO EGUALE A 10,000.

0.	0′	10′	20′	30′	40′	50′	DIFF.	0.	0′	10′	20′	30′	40′	50′	DIFF.
0	000	029	058	087	116	145	29	45	7654	7680	7707	7734	7761	7788	27
1	175	204	233	262	291	320		46	7813	7841	7868	7895	7922	7948	
2	349	378	407	436	465	494		47	7975	8002	8029	8056	8083	8109	
3	523	552	582	611	640	669		48	8136	8163	8190	8217	8244	8271	
4	698	727	756	785	814	843		49	8297	8324	8351	8378	8405	8432	
5	872	901	930	960	989	1018	29	50	8458	8485	8512	8539	8566	8593	27
6	1047	1076	1105	1134	1163	1192		51	8619	8646	8673	8700	8727	8754	
7	1221	1250	1279	1308	1337	1366		52	8778	8805	8832	8859	8886	8913	
8	1395	1424	1453	1482	1512	1540		53	8935	8962	8989	9016	9043	9070	
9	1569	1598	1627	1656	1685	1714		54	9090	9116	9143	9170	9197	9223	
10	1743	1772	1801	1830	1859	1888		55	9243	9270	9297	9317	9350	9376	26
11	1917	1946	1973	2004	2033	2062		56	9396	9422	9449	9475	9502	9528	
12	2091	2120	2149	2177	2206	2235		57	9548	9574	9601	9627	9654	9680	
13	2264	2293	2322	2351	2380	2409		58	9699	9722	9747	9772	9793	9823	
14	2437	2466	2495	2524	2553	2582	29	59	9848	9874	9899	9924	9943	9972	25
15	2611	2639	2668	2697	2726	2755		60	10000	10024	10050	10076	10101	10126	
16	2783	2812	2841	2870	2899	2927		61	10151	10176	10201	10227	10251	10276	
17	2953	2982	3011	3040	3071	3100		62	10301	10326	10351	10375	10402	10426	
18	3129	3157	3186	3215	3241	3272		63	10450	10475	10502	10524	10549	10574	
19	3301	3330	3358	3387	3416	3444		64	10598	10622	10646	10672	10697	10721	
20	3473	3502	3530	3559	3587	3616		65	10746	10771	10795	10819	10844	10868	
21	3643	3673	3702	3730	3759	3788		66	10890	10917	10941	10963	11033	11015	24
22	3816	3843	3873	3902	3930	3959		67	11032	11058	11087	11111	11139	11160	
23	3987	4016	4044	4073	4101	4130		68	11184	11208	11232	11256	11280	11304	
24	4158	4187	4215	4244	4272	4300	28	69	11328	11352	11376	11400	11424	11448	
25	4329	4357	4386	4414	4443	4471		70	11472	11496	11519	11543	11567	11590	
26	4500	4527	4556	4586	4613	4641		71	11614	11638	11661	11685	11709	11732	
27	4663	4697	4725	4754	4782	4810		72	11756	11779	11803	11826	11850	11873	
28	4838	4867	4895	4923	4951	4979		73	11896	11920	11943	11966	11990	12013	
29	5006	5036	5064	5092	5120	5148		74	12036	12060	12083	12106	12129	12153	23
30	5172	5204	5233	5261	5289	5317		75	12173	12196	12221	12244	12267	12290	
31	5344	5372	5401	5429	5457	5485		76	12313	12336	12359	12383	12405	12427	
32	5513	5541	5569	5597	5629	5653		77	12450	12473	12496	12519	12542	12564	
33	5680	5708	5736	5764	5792	5820		78	12586	12609	12632	12654	12677	12699	
34	5847	5875	5903	5931	5959	5986		79	12721	12744	12766	12789	12811	12833	22
35	6014	6042	6070	6098	6125	6153		80	12856	12878	12900	12922	12944	12966	
36	6180	6208	6236	6237	6291	6318		81	12988	13010	13033	13055	13077	13099	
37	6345	6374	6401	6429	6456	6484		82	13121	13143	13165	13187	13209	13231	
38	6511	6538	6565	6593	6621	6649		83	13253	13274	13296	13318	13339	13361	
39	6676	6704	6731	6758	6786	6813	27	84	13383	13404	13426	13447	13468	13489	21
40	6840	6868	6895	6922	6950	6977		85	13512	13533	13555	13576	13597	13619	
41	7004	7031	7059	7086	7113	7140		86	13640	13661	13682	13704	13725	13746	
42	7167	7193	7222	7249	7276	7303		87	13767	13788	13809	13830	13851	13872	
43	7330	7357	7384	7411	7438	7465		88	13893	13914	13935	13956	13977	13997	
44	7493	7519	7546	7573	7600	7627		89	14018	14039	14060	14080	14101	14121	
0.	0′	10′	20′	30′	40′	50′	DIFF.	0.	0′	10′	20′	30′	40′	50′	DIFF.

§ 2. *Il cerchio, suoi rapporti di posizione con diverse rette.*

Il diametro divide il cerchio e la sua circonferenza in due parti uguali.

Il diametro è la più grande di tutte le corde.

Una linea retta non può incontrare la circonferenza in più di due punti.

Il raggio OM (fig. 2) perpendicolare ad una corda AC divide questa corda e l'arco sotteso AMC in due parti uguali.

Per tre punti dati C, A, E non in linea retta si può sempre far passare una circonferenza. Basta per questo inalzare le perpendicolari indefinite MO, NO, sul mezzo delle rette AC AE. Il punto di incontro delle perpendicolari dà il centro del cerchio O; le distanze OC, OA, OE sono uguali.

Una retta dicesi tangente ad una curva quando non ha con essa che un punto di comune.

Una retta che taglia la circonferenza dicesi secante.

La perpendicolare che passa per l'estremità del raggio è tangente alla circonferenza.

Ad archi uguali nel medesimo cerchio corrispondono corde uguali e reciprocamente.

Due parallele intercettano sulla circonferenza archi uguali.

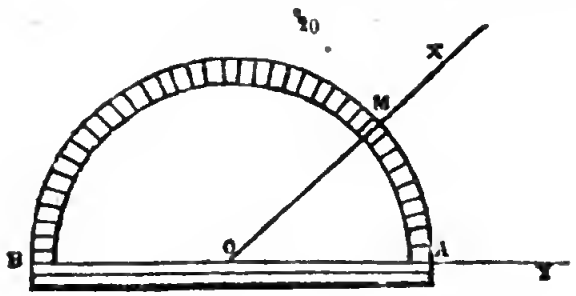
Ad archi uguali corrispondono nel medesimo circolo angoli al centro uguali; se si divide in due, tre o più parti uguali l'arco, e si congiungono i punti di divisione col centro, l'angolo al centro rimarrà diviso in due tre ec. angoli uguali; se due archi hanno tra loro un rapporto per esempio 5 a 7, si potrà dividere il primo in 5, l'altro in 7 parti uguali; e gli angoli al centro corrispondenti saranno divisi l'uno in 5 l'altro in 7 parti uguali; in generale se l'arco aumenta o diminuisce, l'angolo aumenta o diminuisce nello stesso rapporto.

Si può dunque prendere l'arco come misura dell'angolo, per rappresentare in numeri questa misura si divide la circonferenza in 360 parti uguali che si chiamano gradi; ogni grado in 60 minuti, ogni minuto in 60 secondi ec.

Un angolo retto è 90°, e la circonferenza intera è 1296000 secondi.

Un angolo di 36° 21′ 17″ (cioè 36 gradi 21 primi 17 secondi) ossia di 130877 secondi è $\frac{130877}{1296000}$ di quattro angoli retti ovvero $\frac{130877}{324000}$ di un angolo retto, incirca $\frac{2}{3}$ o più prossimamente $\frac{19}{57}$ di un angolo retto.

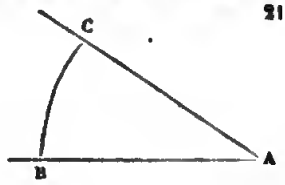
Si misurano e si costruiscono gli angoli sopra il disegno con un semicerchio di ottone o di corno graduato (fig. 20) divi-



so in 180 parti uguali; si fa coincidere il vertice col centro del semicerchio, la linea di fede OA con uno dei lati dell'angolo, e la direzione dall'altro lato OX segna il numero dei gradi dell'angolo stesso. Quando però si voglia riportare con più precisione sopra il disegno un angolo dato in gradi e minuti bisogna ricorrere alla tavola che abbiamo posta a pagina 92. Essa comprende le corde di tutti gli angoli di dieci in dieci minuti per tutti i gradi del quadrante. Si suppone il raggio diviso in 10000 parti, e la corda che corrisponde ad un angolo dato in gradi e minuti si trova espressa in parti di raggio. Così troviamo l'angolo di 4° cui corri-

sponde una corda che contiene 698 di queste 10000 parti di raggio. Con questo raggio facendo centro in A (fig. 21) si de-

21



scrive un arco. Quindi dal punto B di quest'arco come centro, con un raggio uguale al valore della corda che si trova sulla tavola, si descrive un secondo arco che taglia il primo in C, BAC è l'angolo cercato.

Il valore 11232 della corda di un angolo di 68° 20′ si trova nella tavola (vedi pag. 92) all'incontro della linea orizzontale che comincia per 68 e della colonna verticale che ha nella intestatura 20′. Per avere il valore delle corde per angoli differenti da quelli delle tavole si prendono le parti proporzionali alle differenze segnate nella colonna D FF.

È inutile estendere la tavola delle corde oltre il quarto di cerchio, perchè ogni angolo maggiore di 90°, ha per supplemento un angolo minore di 90°, e costruito questo supplemento, basta prolungare un lato per avere l'angolo maggior di 90°.

È stata proposta anco una altra divisione chiamata centesimale, la quale consiste nel dividere l'intera circonferenza in 400° parti uguali chiamate gradi, il grado in 100 minuti, il minuto in 100 secondi e così seguitando; questa offre il vantaggio di potere scrivere le parti di grado in frazioni decimali così; 67 gradi 75 minuti 37 secondi e $\frac{3}{10}$ si possono scrivere 67°,75375.

Tuttavia la divisione sessagesimale è sempre la più usitata. La tavola qui accanto serve a ridurre in divisioni centesimali gli angoli espressi in divisioni sessagesimali e viceversa.

L'angolo *inscritto* è quello che ha il vertice sulla circonferenza (fig 22).

L'angolo inscritto ha per misura la metà dell'arco compreso tra i suoi lati. L'angolo formato da una tangente e da una corda ha la stessa misura.

Tutti gli angoli ABC AB′C AB″C inscritti in uno stesso segmento ABC sono dunque eguali, ed un angolo inscritto nella semicirconferenza è retto.

22

L'angolo fatto da due secanti ha per misura la metà della somma o della differenza degli archi intercetti da queste due secanti, secondo che il punto di intersezione delle due secanti che è il vertice dell'angolo è interno o esterno al circolo.

§ 3. *Superficie delle figure piane.*

Si chiama altezza di un triangolo la perpendicolare abbassata da uno dei vertici sul lato opposto considerato come base. Il piede di questa perpendicolare può cadere al di dentro o al di fuori del triangolo.

L'altezza del parallelogrammo è la perpendicolare che misura la distanza dei due lati paralleli.

L'altezza del trapezio è pure la distanza dei due lati paralleli.

Misurare l'area o superficie di una figura vuol dire trovare quante volte questa superficie ne contiene un altra che si prende per unità di misura.

In generale si prende per unità di superficie un quadrato che abbia per lato l'unità di lunghezza.

L'area di un triangolo è uguale al prodotto della sua base per la metà della altezza, cioè si debbono moltiplicare l'uno per l'altro i numeri che rappresentano la misura della base e della metà dell'altezza, a questo prodotto da quante volte il triangolo contiene il quadrato preso per unità di misura.

La misura della base e dell'altezza non è che il rapporto di queste linee al lato del quadrato preso per unità di misura.

L'area di un parallelogrammo è uguale al prodotto della base per l'altezza.

L'area del trapezio è uguale alla metà del prodotto della altezza per la somma delle basi parallele.

TAVOLA PER RIDURRE LA DIVISIONE SESSAGESIMALE DEL CERCHIO IN DIVISIONE CENTESIMALE E VICEVERSA.

GRADI SESSAGESIMALI.	DIVISIONE CENTESIMALE.	GRADI DECIMALI	DIVISIONE SESSAGESIMALE.
	G. ′ ″		′
10	11 11 11, 0	1	0°.54
20	02 12 03, 2	2	1.80
30	00 00 00, 0	3	0.40
40	44 44 44, 4	4	0.00
50	00 00 00, 0	5	4.00
60	00 00 00, 7	6	0.04
70	77 77 77, 0	7	0.10
80	00 80 00, 0	8	7.12
90	100 00.00, 0	9	8.00
100	111 11 11, 1	10	0.00
110	102 81 02, 1	10	10.00
120	102 82 82, 0	20	17.00
130	144 44 44, 4	40	06.00
240	102 82 82, 0	80	40.00
150	102 60 06, 7	60	04.00
160	177 77 77, 0	70	03.00
170	180 82 80, 0	80	72.00
200	200 00 00, 0	90	01.00
		100	00.00
		110	00.00
		120	102.00
		700	117.00
		140	126.00
		106	102.00
		100	144.00
		170	200.00
		100	102.00
		180	171.00
		000	100.00

MINUTI SESSAGESIMALI.	DIVISIONE CENTESIMALE.
	′ ″
10	10 01, 0
20	07 00, 7
30	00 00, 0
40	74 07, 4
50	00 00, 0

SECONDI SESSAGESIMALI.	DIVISIONE CENTESIMALE.
	″
10	00, 0
20	01, 7
30	02, 0
40	1′ 00, 0
50	1 04, 0

MINUTI DECIMALI.	DIVISIONE SESSAGESIMALE.
	′ ″
1	0 03, 4
2	1 04, 0
3	1 07, 0
4	2 00, 0
5	2 40, 0
6	3 14, 4
7	4 20, 0
8	4 19, 0
9	5 01, 0
10	6 04, 0
20	10 48, 0
30	10 12, 0
40	11 36, 0
50	17 00, 0
60	21 04, 0
70	37 48, 0
80	40 10, 0
90	40 00, 0
100	54 00, 0

SECONDI DECIMALI.	DIVISIONE SESSAGESIMALE.
	″
1	0″,034
2	0,040
3	0,070
4	1,220
5	1,020
6	1,044
7	1,000
8	0,022
9	2,010
10	0,140
20	0,400
30	1,700
40	13,000
50	16,000
60	11,440
70	12,080
80	00,000
90	20,100
100	03,400

Si chiama poligono regolare un poligono nel quale gli angoli e tutti i lati sono uguali tra loro.

Ogni poligono regolare può essere inscritto nel circolo, e può esservi circoscritto. Si può cioè far passare una circonferenza per tutti i suoi vertici, ed una tangente a tutti i suoi lati.

Un poligono regolare ha per misura la metà del prodotto del suo perimetro per il raggio del circolo iscritto.

Il cerchio può essere considerato come un poligono regolare, di una infinità di lati; ed ha per misura la metà del prodotto della circonferenza per il raggio.

Quando si conosce il raggio di un circolo, si ottiene la circonfereeza moltiplicando il diametro per il rapporto numerico $\frac{22}{7}$ o per $\frac{963}{110}$.

Il primo di questi rapporti è stato dato da Archimede ed è approssimato fino ad 0,01.

Il rapporto $\frac{355}{110}$ dovuto ad Adriano Mezio, si tiene a mente con facilità, osservando che si compone delle tre prime cifre dispari scritte due volte ciascuna 113355 separate in due classi, la classe di destra rappresenta il numeratore, qual-

la di sinistra il denominatore. Questo rapporto è approssimato fino ad 0,00001.

Il rapporto della circonferenza al diametro scritto con 7 decimali è rappresentato da 3,1415927.

Ludolfo Van Ceulen lo ha calcolato con 34, Lagny con 128 decimali, e l'approssimazione è stata spinta fino alla 155ma decimale in un manoscritto della biblioteca Ratclif di Oxford; ma benchè si possa avvicinarsi quanto si vuole al di lui vero valore, è provato che non può essere espresso esattamente con un numero finito di cifre.

La gran chimera della quadratura del circolo, consisterebbe nel trovare con una costruzione geometrica, la lunghezza della circonferenza della quale si conosce il raggio, oppure che è lo stesso il lato del quadrato equivalente al cerchio di cui si conosce il raggio. Il problema è impossibile e non vi sono che dei pazzi o degli ignoranti che si ostinino in questa ricerca.

Esprimendo adunque per il simbolo π il rapporto della circonferenza al diametro, che abbiamo veduto potersi rappresentare numericamente con 3,1415927, è per r il raggio del cerchio avremo

$$\textit{la circonferenza} = 2\,\pi\,r$$

$$\textit{l'area del cerchio} = \pi\,r^2$$

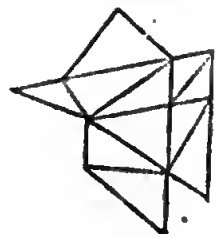
Il settore circolare A M C O (fig. 2) ha per misura la metà del prodotto dell'arco AMC per il raggio.

L'area di questo settore sta all'area del cerchio, come l'arco AMC sta alla intera circonferenza.

Il segmento circolare AMC ha per misura la differenza tra il settore AMCO e il triangolo MCO.

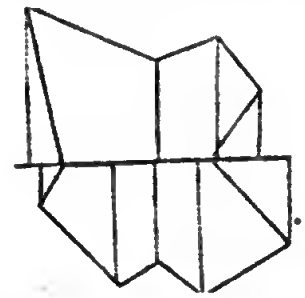
Poichè ogni figura piana rettilinea può essere divisa in triangoli, si otterrà la sua area facendo la somma delle aree dei triangoli nei quali è stata divisa (fig. 23).

23



Invece della decomposizione in triangoli rappresentati dalla fig. 23 si preferisce talvolta la decomposizione in triangoli e trapezii, della quale darà un idea la figura 24. Allora la figura piana è compo-

24

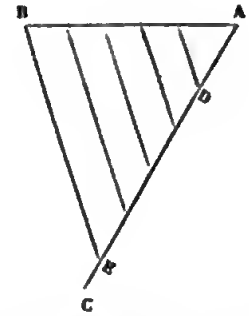


sta della somma e delle differenze di un certo numero di elementi triangolari e trapezoidali.

§ 4. *Linee proporzionali, figure simili e rapporti delle figure.*

Per dividere una retta AB (fig 25) in

25



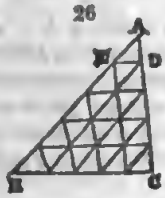
parti uguali, per esempio in cinque, si condurrà dal punto A una retta indefinita AC sulla quale si porterà cinque volte una lunghezza arbitraria DA da A sino in E, si congiungeranno i punti B od E, per i punti di divisione compresi tra A ed E si condurranno delle parallele a BE, le quali divideranno la retta AB in cinque parti uguali.

Nella figura 25 abbiamo una serie di triangoli i quali hanno il vertice in A, per basi le parallele, i loro lati che stanno tutti tra loro nel rapporto 1 : 2 : 3 : 4 ec. e gli angoli uguali.

Gli angoli alla base sono formati dalle parallele incontrate dai lati AB, AC.

Conducendo pei punti di incontro (fig. 26) delle parallele alle rette AB, AC e BC

26



si divide l'intera figura in triangoli uguali ad ADE, dei quali ABC per esempio ne contiene 25.

Paragonando i triangoli AED ed ABC si vede, che mentre ciascuno dei lati del triangolo AED è contenuto 5 volta nel lato omologo del triangolo ABC, il triangolo AED è contenuto 25 volte nel triangolo ABC. Poichè 25 è il quadrato di 5 si dice che le superficie di questi triangoli stanno fra loro come i quadrati dei lati.

Nei triangoli che abbiamo considerato nelle fig. 25 a 26 i lati stanno tra loro nel rapporto

$$1 : 2 : 3 : 4 : 5 \text{ ec.}$$

le superficie di questi triangoli stanno nel rapporto

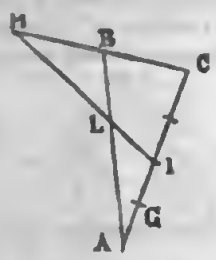
$$1 : 4 : 9 : 16 : 25,$$

ossia come i quadrati dei lati.

Il metodo della figura 25 per dividere in parti uguali una retta non da risultati esatti che quando l'angolo BAC è inferiore a 60° circa, e quando le parallele sono condotte con la più gran cura. Il modo seguente di operare è senza inconveniente alcuno, e può essere adoprato sul disegno e sul terreno.

Si conduce (figura 27) per una delle

27

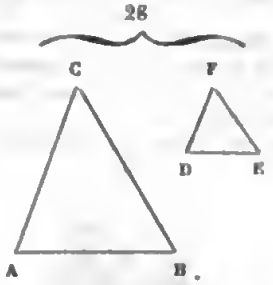


estremità della retta AB che bisogna dividere in parti uguali, per esempio in tre, una retta qualunque AC, e su questa si riporta quattro volta una lunghezza arbitraria AG. Si congiungono li estremi C, B e si prolunga CB in H in modo che sia BC = BH; si congiunga il punto H col punto I, e la retta IH che taglia AB in L, darà

$$BL = \frac{1}{3} AB.$$

SIMILITUDINE DELLE FIGURE. Due triangoli ABC, DEF sono *simili* quando hanno i tre angoli A, B, C e D, E, F (fig. 28) re-

28



spettivamente uguali. I lati opposti agli angoli uguali si chiamano omologhi. Nei triangoli simili i lati omologhi sono proporzionali in modo che si ha

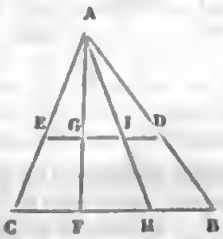
$$AB : DE :: BC : EF :: AC : DF$$

basta che due triangoli ABC, DEF abbiano due angoli A = D e B = E respettivamente uguali, perchè sia il terzo angolo C = F e i lati omologhi proporzionali.

Reciprocamente due triangoli che hanno i lati proporzionali sono equiangoli e quindi simili. Due triangoli sono simili anco quando hanno un angolo uguale compreso tra lati proporzionali.

La posizione dei lati determina in certi casi la similitudine dei triangoli; essi sono simili quando i lati dell'uno sono paralleli a quelli dell'altro e quando sono ad essi perpendicolari; se si conduce una linea ED parallela alla base CD di un triangolo ABC, essa determina (fig. 29) un trian-

29



golo ADE simile al triangolo ABC. Nel modo stesso determina i triangoli ADI, ADG

simili ai triangoli ABH, ABF, in modo che i lati AB, AC e le linee AF, AH sono divise proporzionalmente dei punti D, E, G, I e si ha

$$AB : AD :: AC : AE :: AF : AG :: AH : AI$$

oppure

$$BD : AD :: EC : AE :: FG : AG :: HI : AI$$

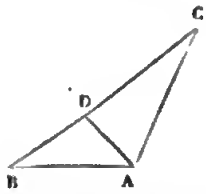
si ha pure

$$BH : HF : FC :: ID : IG : EG$$

È vera anco la reciproca, cioè che se la linea DE divide in parti proporzionali i lati AB AC di un triangolo, essa è parallela alla base BC.

Una linea AD (fig. 30) che divide l'an-

30



golo di un triangolo in due parti uguali, divide il lato BC opposto all'angolo A in due segmenti proporzionali ai lati in modo che si ha

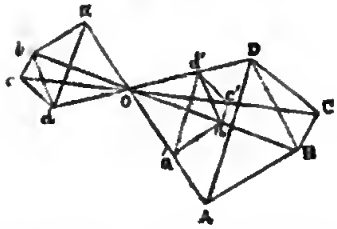
$$BD : DC :: BA : AC$$

Due *poligoni simili* sono equiangoli tra loro, ed hanno i lati omologhi proporzionali.

Due poligoni simili possono essere decomposti in uno stesso numero di triangoli simili e similmente disposti.

Se si prende (fig. 31) un poligono ABCD,

31



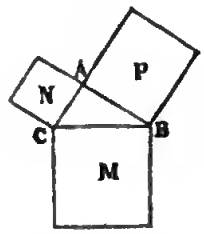
ed un punto qualunque O nel piano di queste peligeno; conducendo da questo punto ai vertici del peligono le rette OA, OB, OC, OD e prolungandole al di là del punto O; quindi prendendo Oa, Ob, Oc, Od in un certo rapporto, con OA, OB, OC, OD per esempio

$$Oa = \frac{2}{3}OA \quad Ob = \frac{2}{3}OB \text{ ec.}$$

ed unendo i vertici a, b, c, d, si avrà il poligono *abcd* simile ad ABCD. Il punto O si chiama *centro di similitudine interno* rispetto ai poligoni ABCD ed *abcd*. Se si costruisce nel modo stesso a' b' c' d' simile ad ABCD rispetto a questi O sarebbe *esterno*.

RAPPORTI DELLE FIGURE. La similitudine dei triangoli conduce alla dimostrazione di una proposizione riguardata in geometria come fondamentale. La scoperta di essa si deve a Pitagora, e consiste in questo

32



In un triangolo rettangolo (fig. 32) il quadrato M fatto sull'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati N e P fatti sui cateti. Si esprime questo risultato nel modo seguente

$$CB^2 = AB^2 + AC^2$$

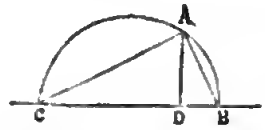
o algebricamente

$$a^2 = b^2 + c^2$$

rappresentando con a, b, c i lati del triangolo opposti agli angoli A, B, C.

Questa proposizione è la conseguenza della similitudine dei triangoli ADB, ADC, nei quali si decompone il triangolo CAB (fig. 33) quando si abbassa una perpendi-

33



colare AD dal vertice dell'angolo retto sull'ipotenusa. Ciascuno di questi trian-

goli è simile al triangolo CAB. Si deduce di qui facilmente che

$$\begin{array}{l} CD : DA :: DA : DB \\ CD : CA :: CA : CB \\ DB : DA :: BA : CB \end{array}$$

L'angolo retto CAB avendo il suo vertice su qualche punto della semicirconferenza la quale ha per diametro BC, ne risulta che abbassando da questo vertice una perpendicolare sul diametro, questa è media proporzionale tra i due segmenti CD, DB, e ciascuna delle corde AC, AB è media proporzionale tra il diametro e il segmento adiacente.

Queste relazioni si traducono nelle uguaglianze

$$AD^2 = CD \times DB,\ AC^2 = CB \times CD,\ AB^2 = CB \times BD.$$

Due triangoli che hanno un angolo uguale stanno fra loro come il prodotto dei lati che comprendono l'angolo uguale.

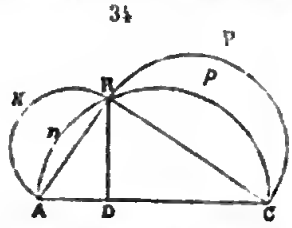
I perimetri di due triangoli o più generalmente di due poligoni simili, stanno tra loro come i lati omologhi, e le loro superficie come i quadrati di questi stessi lati.

Due poligoni regolari di uno stesso numero di lati essendo sempre simili, i loro perimetri stanno come i lati ed anco come i raggi dei circoli iscritti e circoscritti; le loro superficie stanno come i quadrati di questi medesimi raggi.

Due cerchi essendo dei poligoni regolari di un numero infinito di lati, e per conseguenza simili, le loro circonferenze stanno come i raggi, e i circoli come i quadrati dei raggi.

Questa proposizione unita a quella del quadrato dell'ipotenusa, conduce alla quadratura delle lunule di Ippocrate di Chio celebri nella antichità. Costruendo (figura 34) sui lati di un triangolo rettangolo

34



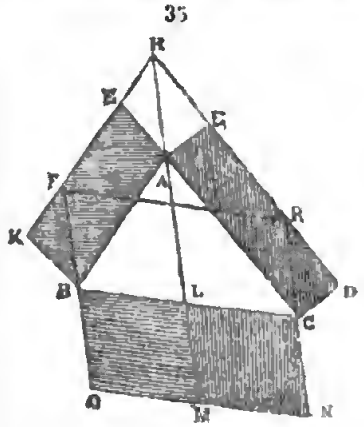
presi come diametri tre semicerchi che si tagliano, apparirà facilmente da ciò che precede che la somma dei due più piccoli è uguale al più grande; e togliendo i segmenti comuni, che la somma delle lunule n p è uguale al triangolo ABC; l'una di esse è uguale al triangolo ABD, l'altra al triangolo BDC.

Le lunule di Ippocrate ci offrono il più antico esempio che si conosca di uguaglianza tra una superficie terminata da linee curve ed una terminata da linee rette.

Si deve al fratello del celebre Clairaut una generalizzazione della proposizione relativa al quadrato dell'ipotenusa degna di esser notata.

Se si descrivono (fig. 35) due paralle-

35



logrammi qualunque AD, AK sui lati AC, AB di un triangolo obliquangolo e si prolungano i lati dei parallelogrammi finchè si incontrino in H, quindi si conduce HA o si prolunga all'incontro della base BC e si prende LM = HA e si costruisce il parallelogrammo BCNO, sarà questo parallelogrammo uguale alla somma dei due precedenti fatti sui lati.

Se due corde si tagliano in un cerchio le parti di queste corde sono reciprocamente proporzionali; ossia il rettangolo delle due parti dell'una è uguale al rettangolo delle due parti dell'altra.

Se da un punto preso fuori del cerchio si conducono le secanti, le quali incontrino il cerchio in due punti, le secanti intere e le loro parti esterne saranno reciprocamente proporzionali; ossia il rettangolo di ciascuna secante e della sua parte esterna, sarà uguale al rettangolo dell'altra secante e della sua parte ester-

na. Questo rettangolo sarà anco uguale al quadrato della tangente condotta dallo stesso punto alla circonferenza.

In un parallelogrammo la somma dei quadrati dei lati è uguale alla somma dei quadrati delle diagonali.

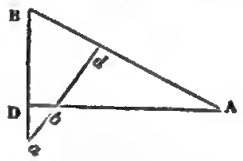
In un quadrilatero iscritto il rettangolo delle diagonali è uguale alla somma dei rettangoli dei lati opposti.

§. 5. *Di alcuni gruppi di proposizioni che si rannodano alla geometria elementare.*

DELLE TRASVERSALI. Dicesi *trasversale* una retta che taglia altre rette non parallele.

Se tre rette che si tagliano AB, AD, BD (fig. 36) sono incontrate da una tra-

36



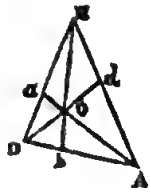
versale *dba* il prodotto dei tre segmenti di destra è uguale al prodotto dei tre segmenti di sinistra in modo che

$$Ab \cdot Bd \cdot Da = Ad \cdot Ba \cdot Db$$

i segmenti Ab, Bd Da diconsi di destra poichè riguardando dal vertice di ciascun angolo verso il centro del triangolo rimangono sul lato di destra del triangolo.

Se tre rette AB, BD, DA si tagliano o da un punto interno O, (fig. 37) per i

37

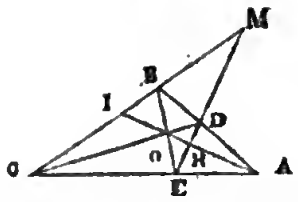


vertici A, B, C, si conducono le rette Aa, Bb, Cc il prodotto dei segmenti di destra è uguale al prodotto dei segmenti di sinistra

$$Ab \cdot Bd \cdot Da = aB \cdot bD \cdot dA.$$

ARMONICHE. Se A ed M sono (fig. 38) i vertici di due angoli CAB, CME che si incontrano coi loro lati nei punti D, B,

38



C, E; conducendo nel quadrilatero BDEC, le diagonali BE, DC, per il punto O d'incontro di queste diagonali, o per il vertice A conducendo la retta AOI si avrà.

$$CM \cdot BI = MB \cdot CI$$

La retta MC dicesi divisa armonicamente nei punti B ed I.

Le distanze CM, CB, CI dal punto C ai punti M, B, I sono tali che si ha la proporzione

$$CM : CI = CM - CB : CB - CI$$

che prende il nome di *proporzione armonica continua*.

In generale quattro quantità a, b, c, d sono in *proporzione armonica* quando la prima sta alla quarta, come la differenza tra la prima e la seconda sta alla differenza tra la terza e la quarta, in modo che si ha.

$$a : d :: a - b : c - d$$

Una serie di quantità forma una *progressione armonica*, quando tre qualunque consecutive formano una proporzione armonica continua.

La retta ME è divisa essa pure armonicamente nei punti H, D e lo stesso avverrebbe di ogni retta condotta per il punto M.

Le rette condotte per il punto M formano un *fascetto armonico* del quale M è il *polo* ed AI la *polare*.

Considerando due rette qualunque ME, MC del fascetto armonico il punto di concorso delle diagonali si trova sulla polare.

§. 6. *Soluzione dei problemi.*

In ciò che precede vi è tutto quanto è necessario a risolvere i principali problemi di geometria, e costruire le figure ad essi relative.

I. Dividere una retta in due parti uguali? (V. pag. 89. fig. 5).

II. Per un punto dato sopra una retta condurre una perpendicolare a questa retta? (V. pag. d.ª).

III. Da un punto dato fuori di una retta abbassare una perpendicolare sopra di essa? (V. pag. d.ª).

IV. Preso un punto sopra una retta data farvi un angolo uguale ad un angolo dato (V. pag. 89, fig. 4).

V. Dividere un angolo od un arco in parti uguali? Bisogna abbassare dal vertice dell'angolo una perpendicolare sulla corda che sottende l'arco compreso tra i lati di quest'angolo, e descritto dal vertice come centro (V. pag. 93).

VI. Per un punto dato A condurre una parallela ad una retta data BC (fig. 39)?

39

Dal punto A come centro e con raggio sufficientemente grande descrivendo l'arco indefinito EO, e dal punto E come centro con lo stesso raggio descrivendo l'arco AF e prendendo poi EO = AF, si conduca AD che sarà la parallela cercata.

Questa costruzione si fa per mezzo della riga e del compasso, quella per mezzo della squadra è più pronta e più usitata. (V. pag 90, fig. 11).

VII. Dati due angoli di un triangolo trovare il terzo. Si può costruire un triangolo che abbia due angoli uguali ai dati, e il terzo sarà quello cercato, o si può sottrarre la somma di questi due angoli da due retti.

VIII. Dati due lati di un triangolo e l'angolo compreso descrivere il triangolo? (V. pag 94).

IX. Dati un lato e due angoli costruire il triangolo? (V. pag. d.ª).

X. Dati i tre lati costruire il triangolo? (V. pag. d.ª).

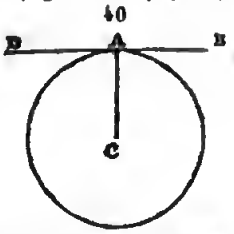
XI. Dati due lati e l'angolo opposto costruire il triangolo? (V. pag. d.ª fig. 14).

XII. Dati due lati, e l'angolo di un parallelogrammo costruire il parallelogrammo? (V. prob. VIII e VI).

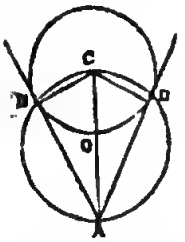
XIII. Trovare il centro di un cerchio o di un arco dato? (V. pag. 93).

XIV. Per un punto dato A sulla circonferenza o fuori di essa condurre la tangente AB (fig. 40) (V. pag. 93) nel secondo caso le tangenti sono due AB e AD (fig. 41).

40

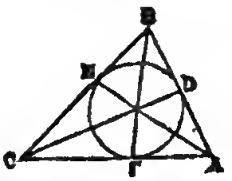


41



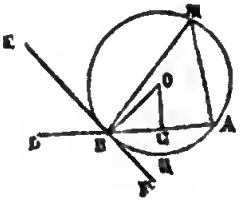
XV. Iscrivere un cerchio in un triangolo ABC? (fig. 42) le tre linee che dividono in due parti uguali ciascuno degli angoli del triangolo concorrono in un punto O che è il centro del circolo iscritto; il raggio di questo circolo è la distanza dal punto O a ciascuno dei lati del triangolo.

42



XVI. Sopra una retta data AB descrivere un segmento tale che l'angolo iscritto nel segmento sia uguale ad un angolo dato? (fig. 43) Per il mezzo di AB si

43

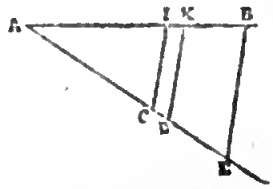


inalzi una perpendicolare indefinita CO, per il punto B si conduca BE che faccia con AB un angolo ABF uguale all' angolo dato, e si inalzi BO perpendicolare a BE, allora BO e CO si incontreranno in un punto O che sarà il centro, e BO sarà il raggio di un circolo il cui segmento BMA è capace dell' angolo uguale all' angolo dato.

XVII. Dividere una retta AB (fig. 44) in un numero di parti uguali o proporzionali a linee date? (V. pag. 96). Si dispongano le rette date AC, CD, DE sopra una retta qualunque che passi per il punto A, si congiunga l' estremo E con B e per i punti D, C, si conducano le parallele ad EB, le quali incontreranno AB in K, I e la divideranno nel modo dimandato.

XVIII. Trovare una quarta proporzionale a tre rette date AD, AC, AK (fig. 44). (V. pag. 97). Si dispongano

44

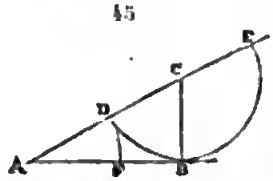


queste rette come nella figura, si congiunga il punto D col punto K, si conduca CI parallela a DK, e si avrà AI quarta proporzionale cercata.

XIX. Trovare una media proporzionale tra due linee date DB e DC? (fig. 33). (V. pag 98). Si descriva una mezza circonferenza sopra BC come diametro, e la perpendicolare DA inalzata sul punto D, sarà la media proporzionale cercata.

XX. Dividere una retta data AB in media ed estrema ragione; cioè in due parti AF, FB tali che la più grande sia media proporzionale tra la intera linea AB e la parte più piccola FB? (fig. 45) All' estre-

45



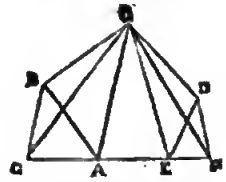
mità B si inalzi BC perpendicolare, e uguale alla metà di AB; e si descriva una circonferenza col centro in C e raggio BC; si conduca AC la quale incontri la circonferenza in D e si prenda AF uguale ad AD; la retta AB sarà divisa in media ed estrema ragione nel punto F.

XXI. Fare un quadrato equivalente ad un parallelogrammo o ad un triangolo dato? Il lato del quadrato è medio proporzionale tra la base e l' altezza del parallelogrammo, o tra la base e la metà dell' altezza del triangolo dato.

XXII. Sopra una retta data fare un rettangolo equivalente ad un rettangolo dato. L' altezza del rettangolo cercato è una quarta proporzionale dopo la retta data, la base e l' altezza del rettangolo dato.

XXIII Trasformare un poligono ABCDE (fig. 46) in un triangolo equivalente. Per

46



il punto D si conduce DF parallela alla diagonale CE, il triangolo CEF sarà equivalente al triangolo CED e il pentagono ABCDE sarà trasformato in un quadrilatero; seguitando nel modo stesso si trasformerà il quadrilatero in un triangolo.

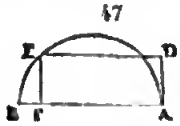
XXIV. Fare un quadrato equivalente alla somma o alla differenza di due quadrati dati?

Si costruisce un triangolo rettangolo che abbia i lati adiacenti all' angolo retto uguali ai lati dei quadrati dati, l' ipotenusa di questo triangolo sarà il lato del quadrato cercato equivalente alla somma dei due.

Se si costruisce un triangolo rettangolo che abbia per ipotenusa il maggior lato dei quadrati dati, ed uno dei lati uguale a quello del quadrato più piccolo; il terzo lato sarà quello del quadrato uguale alla differenza dei due dati.

XXV Costruire un rettangolo equivalente ad un quadrato dato, i cui lati adiacenti facciano una somma data A B? (fig. 47).

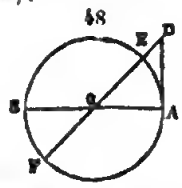
47



Sopra AB come diametro si descriva una semicirconferenza; si conduca E D parallela al diametro, ad una distanza AD uguale al lato del quadrato dato, e incontri la circonferenza in un punto E. Abbassando dal punto E sopra il diametro la perpendicolare EF, saranno AF ed FB i lati del rettangolo cercato.

XXVI. Costruire un rettangolo equivalente ad un quadrato dato, i cui lati adiacenti abbiano tra loro la differenza data AB (fig. 48).

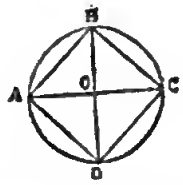
48



Sulla linea data AB come diametro si descriva una circonferenza, si conduca alla estremità del diametro una tangente AD uguale al lato del quadrato dato, e per il punto D e per il centro O si conduca la secante, le linee DE e DF saranno i lati del rettangolo cercato.

XXVII. Iscrivere un quadrato in una circonferenza data? (fig. 49).

49

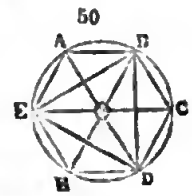


Si conducano i diametri AC, BD ad angolo retto, e si congiungano le loro estremità.

XXVIII. Iscrivere un esagono regolare e un triangolo equilatero in una circonferenza data?

Il lato AB (fig. 50) dell'esagono rego-

50

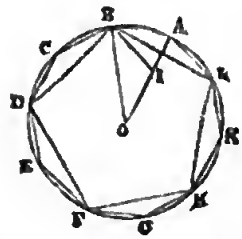


lare ABCDEF inscritto è uguale al raggio OA; ed il triangolo equilatero BFD si ottiene congiungendo due a due i vertici dell'esagono.

XXIX. Iscrivere in un cerchio dato un pentagono, un decagono, un pentadecagono regolare?

Il lato AB (fig. 51) del decagono rego-

51

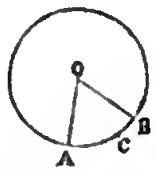


lare inscritto è uguale al segmento maggiore OI del raggio diviso in media ed estrema ragione (V. problema XX).

Il pentagono si ottiene riunendo due a due i vertici del decagono.

Finalmente l'arco CB (fig. 52) sotte-

52



so dal lato del pentadecagono regolare iscritto si ottiene, prendendo la differenza tra l'arco dell'esagono e quello del decagono regolare.

Poichè un arco può essere suddiviso in 2, 4, 8, 32 ec. parti uguali, si possono iscrivere rigorosamente tutti i poligoni regolari contenuti nelle serie.

3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, ec.
4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ec.
5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, ec.
15, 30, 60, 120, 240, 480, 960, 1920, ec.

Fino ai primi di questo secolo si era creduto, che fossero questi i soli poligoni regolari che si potessero descrivere per mezzo della riga e del compasso; ma l'illustre geometra tedesco Gausa ha provato, che si possono costruire ugualmente tutti i poligoni, il cui numero dei lati sia espresso da un numero primo,

che diminuito di una unità dia una potenza esatta di 2. Si possono dunque iscrivere nel circolo per mezzo della riga e del compasso i poligoni di 17, di 257 ec. lati perchè

$$17 - 1 = 2^4$$

$$257 - 1 = 2^8$$

e con essi tutti quelli che ne derivano . .

Del resto quando il numero dei lati divieno troppo grande, o si opera sopra figure non grandi, è meglio andare a tentoni con dei processi grafici, che in molti casi conducono ad una approssimazione sufficiente nella pratica.

Così il lato dell' ettagono regolare (poligono dei sette lati) è a men di un millesimo di differenza uguale alla metà del lato del triangolo equilatero iscritto.

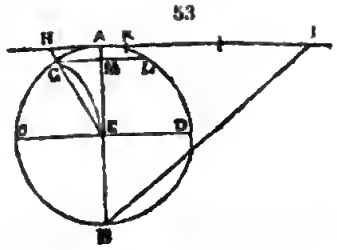
La tavola seguente può servire in molti casi per costruire dei poligoni regolari.

NUMERO dei lati del poligono.	VALORE del lato quando il raggio del circolo circoscritto si pone uguale a 10000.	VALORE del raggio del circolo circoscritto posto il lato del poligono 10000.
3	17328	5775
4	14142	7071
5	11756	8508
6	10000	10000
7	8678	11524
8	7654	13066
9	6840	14618
10	6180	16180
11	5634	17747
12	5176	19318
13	4786	20891
14	4450	22470
15	4158	24048

QUADRATURA APPROSSIMATIVA DEL CIRCOLO. La rettificazione della circonferenza, e la quadratura del cerchio che ne dipende; si ottengono con molta approssimazione da una soluzione grafica che riportiamo.

Si conducano (fig. 53) due diametri ad angolo retto AB, CD, e sia AH perpendicolare a BA; prendendo l'arco CG di 60° si condurrà EGH o si porterà tre volte il raggio da H in I; quindi congiungendo B con I si avrà BI che differisce meno

53

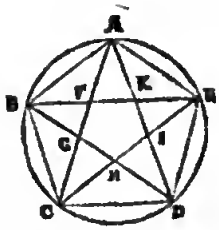


di seicento millesimi dalla lunghezza della semicirconferenza che ha per raggio EA.

POLIGONI STELLATI. Dalla costruzione dei poligoni regolari convessi, si deduce quella dei *poligoni regolari stellati*. Questi si costruiscono per *riduzione* congiungendo di due in due, di tre in tre, di quattro in quattro i vertici di un poligone regolare; o *per estensione* prolungando i lati di questo, e determinando le loro intersezioni di due in due, di tre in tre, di quattro in quattro.

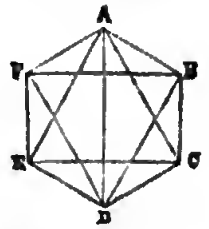
La figura 54 mostra un pentagono stol-

54



lato per riduzione del pentagono; e la figura 55 un poligono stellato per esten-

55



sione dell' esagono.

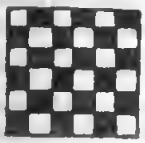
Il numero dei poligoni stellati che si deducono da un poligono dispari è uguale alla metà del numero dei lati diminuito di tre; il numero dei poligoni stellati che si deducono da un poligono pari, è la metà del numero dei lati di questo poligono diminuito di quattro.

Così il triangolo e il quadrato non danno poligoni stellati; il pentagono e l'esagono ce danno un solo; l'ettagono e l'ottagono due, e così seguitando.

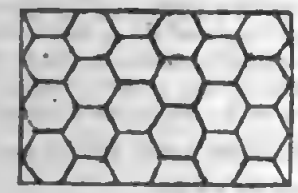
I poligoni regolari convessi e stellati si adoprano spesso nelle arti meccaniche, e negli ornamenti architettonici. Le figure 56, 57, 58, e 59 mostrano l'uso il

56

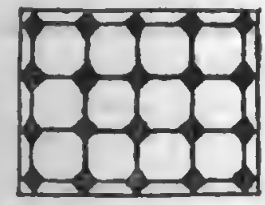
57



58



59



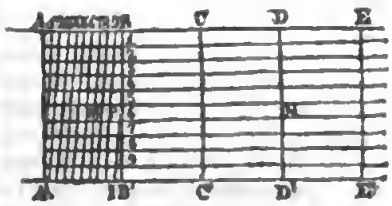
più frequente che si fa nelli scompartimenti dei triangoli equilateri, dei quadrati, degli esagoni regolari, e di una riunione di quadri, e di ottagoni regolari.

§ 7. *Geometria pratica*.

Le costruzioni precedenti si riferiscono in gran parte al disegno lineare. Nei disegni di Architettura, di macchine, nella costruzione delle carte topografiche, e in una quantità di applicazioni è necessario far uso dei principi di Geometria che abbiamo esposti di sopra, incominciando dalla costruzione delle *scale* sino a quelli degl' istrumenti i più delicati che servono agl' ingegneri e agli astronomi.

SCALE. Ogni volta che per mezzo di un disegno si vuole rappresentare un oggetto geometricamente, si incomincia dallo stabilire un rapporto fra le dimensioni dell'oggetto e quelle corrispondenti del disegno, tra l'unità di misura dell'oggetto e quella del disegno; così una lunghezza di un metro si rappresenta per esempio con un centimetro, ed allora il rapporto del disegno al vero è quello di uno a cento; il che si suole esprimere dicendo che il disegno è costruito sopra una scala di uno a cento. Sia la lunghezza AB (fig. 60) che rappresenti l'unità di

60



misura adottata per il disegno, e supponiamo che si tratti di misurare le differenti lunghezze sul disegno sino ad un centesimo di unità.

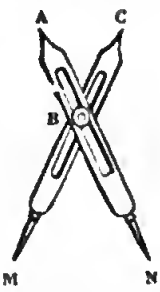
Sulla AB prolungata si prendano le lunghezze BC, CD, DE, ec. uguali ad AB ed inalzando le perpendicolari nei punti A, B, C, D, E si prendano sopra l'una di esse dieci parti uguali, le cui estremità sono segnate 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, B', si conducano per questi punti di divisione delle parallele ad AE, e finalmente dopo aver diviso AB ed A' B' in dieci parti uguali si tirino delle oblique, congiungendo le divisioni 1, 2, 3, ... B prese sulla AB con le divisioni A', 1, 2, .. I respettivamente prese sopra A' B'.

Si vede che nel triangolo BIB' la parallela alla base che corrisponde alla divisione 1 vale $\frac{1}{10}$ di IB' o $\frac{1}{100}$ di AB; le parallele successive valgono $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$ ec. di AB, (v. pag. 96).

Per misurare una lunghezza presa col compasso su questa scala si porta il compasso sopra una parallela ad AE, dove le punte di questa coincidano ciascuna con una divisione; per esempio con N ed M, e si vede che questa lunghezza si compone di 2, $\frac{36}{100}$ unità; poichè N6 è uguale a due unità, MP è $\frac{3}{10}$ di unità e P6 è $\frac{6}{100}$.

Il compasso di riduzione (fig. 61) si

61



compone di due doppie branche, il rapporto delle quali varia a seconda della posizione del bottone B intorno al quale girano. Le branche sono graduate, e il bottone scorre dentro di esse, in modo che la distanza AC può divenire la metà il terzo il quarto ec. della distanza MN. Se queste due distanze debbono essere tra loro nel rapporto $\frac{m}{n}$, basterà, chiamando x la distanza del centro di rotazione B dal centro dell'istrumento e $2a$ la lunghezza di esso, prendere

$$x = \frac{m-n}{m+n}\,a = \frac{1-\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}\,a$$

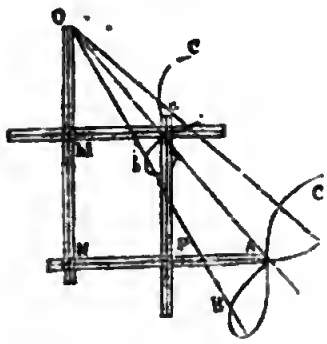
Prony in una sua memoria (*Annales des Ponts et Chaussées*, *t.* 1° del 1835 p. 84) ha dato una tavola dalla quale si ottengono i diversi valori di x che corrispondono al rapporto $\frac{n}{m}$, supponendo adattata al compasso di riduzione una scala divisa in millimetri, nella quale si conta zero dal centro dell'istromento. Il caso più semplice e più comodo è quello in cui la lunghezza totale del compasso sia un doppio decimetro: perchè a espresso in millimetri è 100. Nella piccola tavola sottoposta si veggono allora i valori di x, che corrispondono ai diversi valori del rapporto $\frac{n}{m}$ compresi tra 1 a 0,01.

TAVOLA PER ADOPERARE IL COMPASSO DI RIDUZIONE DI PRONY.

Valori di $\frac{n}{m}$.	Valori di x.	Valori di $\frac{n}{m}$.	Valori di x.	Valori di $\frac{n}{m}$.	Valori di x.	Valori di $\frac{n}{m}$.	Valori di x.
1,00	0,00	0,79	14,39	0,50	33,33	0,24	61,20
0,98	0,20	0,78	14,94	0,49	34,29	0,23	62,06
0,97	1,01	0,77	15,01	0,48	35,14	0,22	62,93
0,97	2,02	0,72	16,28	0,47	36,28	0,21	63,20
0,96	2,04	0,71	16,80	0,46	36,80	0,20	64,07
0,95	2,36	0,70	17,60	0,45	37,82	0,19	64,97
0,94	0,09	0,69	18,54	0,44	38,88	0,18	65,50
0,93	3,62	0,68	19,03	0,43	39,86	0,17	70,94
0,92	4,17	0,67	19,78	0,42	40,80	0,16	73,81
0,91	4,71	0,66	20,54	0,41	41,81	0,15	79,81
0,90	5,26	0,65	21,31	0,40	42,86	0,14	76,54
0,89	5,82	0,64	21,85	0,39	43,86	0,13	76,09
0,88	6,38	0,63	22,76	0,38	44,93	0,12	78,87
0,87	6,96	0,62	23,65	0,37	45,89	0,11	80,15
0,86	7,23	0,61	24,22	0,36	47,20	0,10	81,82
0,85	8,11	0,60	25,00	0,35	48,16	0,09	83,49
0,84	8,70	0,59	25,70	0,34	49,20	0,08	85,10
0,83	9,20	0,58	26,26	0,33	50,26	0,07	86,93
0,82	9,89	0,57	27,30	0,32	51,28	0,06	88,68
0,81	10,56	0,56	28,21	0,31	52,27	0,05	90,49
0,80	11,21	0,55	29,03	0,30	53,03	0,04	92,21
0,79	11,72	0,54	29,97	0,29	53,94	0,03	94,17
0,78	12,36	0,53	30,73	0,28	56,29	0,02	96,00
0,77	13,20	0,52	31,60	0,27	57,58	0,01	98,02
0,76	13,64	0,51	32,45	0,26	56,70	0,00	100,00
				0,25	56,00		

Pantografo. Serve esso pure alla riduzione delle carte, ed è fondato sulla proprietà delle figure simili e dei centri di similitudine. Per mezzo di questo (figura 62) si può copiare immediatamente

62

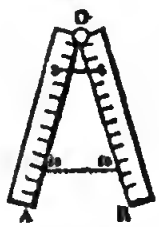


in una maniera continua una figura qualunque, riducendo tutte le dimensioni di questa figura in un rapporto dato.

MNPα è un parallelogrammo composto di quattro righe articolate ai quattro vertici del parallelogramme, il punto O è fisso, e tutto il sistema può rotare intorno a questo punto. Le righe debbono assestarsi in modo che *O*, *α*, *A* sieno sul prolungamento di una stessa retta che passa costantemente per O. Se nel punto A è montata una punta di avorio e in α un lapis; seguendo con la punta A il contorno di una figura qualunque ABC, il lapis in *α* riprodurrà una figura *abc* simile ad ABC; il rapporto delle dimensioni delle due figure è quello di OA ad Oα o di ON ad OM, le righe sono numerate perchè si possa operare ad una scala determinata.

Il compasso di proporzione (fig. 63)

63



si compone di due righe di ottone riunite da una cerniera intorno alla quale possono girare liberamente, formando tutti gli angoli da 0° a 180°. Queste righe portano differenti divisioni intitolate le parti eguali, le corde, i piani, i poligoni, i solidi, i metalli ec. le quali servono a risolvere diversi problemi. Ne accenneremo alcuni.

La linea delle parti uguali. Per trovare la n^{ma} parte di una linea data si prende su ciascuna branca e sulla linea delle parti uguali la divisione *n*, si apre il compasso finchè le divisioni *n* sieno alla distanza uguale alla linea data, e le divisioni 1 2 ... V saranno ad una distanza di $\frac{1}{n}, \frac{2}{n} \ldots \frac{V}{n}$ parti della linea data. Per dividere una linea in parti che stiano tra loro nel rapporto $m : n \cdot p$ ec. si comincerà da sommare questi numeri, e si opererà come precedentemente.

La linea delle corde contiene le corde corrispondenti a tutti gli archi di grado in grado da 1° a 180.°

La linea dei piani serve a costruire delle figure simili che sodisfacciano a condizioni date.

Istrumenti topografici. Nei problemi precedenti di geometria pratica abbiamo l'esempio di istrumenti i quali realizzano con precisione i concetti della geometria teorica rapporto alle figure descritte sopra di un piano. Ora passiamo a descriverne alcuni che hanno rapporto alle linee e ai piani considerati comunque nello spazio.

Gli antichi geometri per fissare la direzione dell'asse del mondo riguardavano la stella polare a traverso di un tubo lungo e sottile il quale si disponeva per tal modo prossimamente nella direzione voluta. Per mirare un oggetto con qualche precisione è più esatto adattare i traguardi ad una riga.

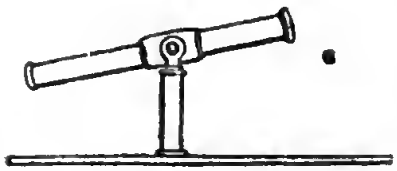
I traguardi sono disposti sopra due alette di ottone fisse sulla riga ad una certa distanza, una di queste porta un piccolo forellino, l'altra un'apertura rettangolare, nella quale sono tesi due fili in croce; ponendo l'occhio dietro il forellino, sono gli oggetti coperti dalla incrociatura dei fili tutti sulla linea determinata dal forellino e dall'incrociatura.

Linda. Talora l'apertura rettangolare (fig. 64) in una delle alette N e N' porta un sole file, al quale corrisponde

64

una fessura longitudinale nell'altra alatta N' o N. Il filo e la fessura sono paralleli e disposti in modo che posando la riga orizzontalmente determinino un piano verticale. Ponendo l'occhio dietro alle fessure gli oggetti coperti dal filo sono tutti nello stesso piano verticale. È tuttavia preferibile di avere un cannocchiale montato sulla riga come nella figura 65.

65



Spesso occorre di dover far piantare dei paletti a diverse distanze sul prolungamento della linea battuta dai traguardi: se le teste dei paletti sono tutte sulla stessa retta traguardando per il forellino vedremo l'incrociatura dei fili radere le teste di tutti i paletti. In generale basterà che ponendosi sull'allineamento i paletti si coprano gli uni con gli altri; allora essi sono sullo stesso piano.

Date le estremità A e B di una linea segnate con dei paletti, sarà facile con questo mezzo il percorrere la linea AB, o il suo prolungamento; basta perciò disporre dei nuovi paletti nella direzione dei primi, osservando che tutti si coprano quando si coprono due di essi; o porsi

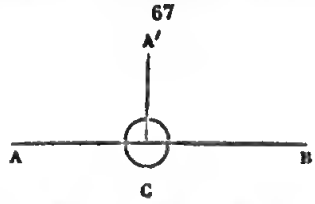
66

in modo coi traguardi che il punto C (V. fig. 67.) sia sull'allineamento AB, osservando dopo aver battuto con essi il punto A nella direzione CA, se sulla medesima direzione dei traguardi, giace anco il punto B.

Nello *Squadro da agrimensori* (fig. 66) i traguardi sono quattro fessure poste in due piani che si incontrano ad angolo retto. Quando per due di esse si traguarda una linea AB, le altre due battono una linea che giace in un piano perpendicolare al primo.

Per verificare se lo squadro è esatto bisogna far porre una mira A (fig. 67) sul-

67



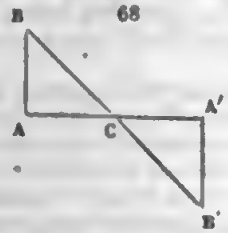
la direzione della linea AB battuta dai primi due traguardi, ed una A' sulla direzione degli altri due; quindi facendo girare lo squadro, fintanto che quella mira A' sia battuta da'traguardi che hanno lasciata la direzione AB, dovranno gli altri due traguardi battere la linea AB, se gli angoli fatti dai traguardi sono uguali e perciò retti e lo squadro esatto.

Dato un punto C sopra una linea AB si può con lo squadro condurre per C una perpendicolare alla linea AB. Basta porre lo squadro in C battere la linea AB con due traguardi, gli altri due battono una linea perpendicolare alla prima che passa per il punto C.

Se il punto C fosse dato fuori della linea AB si potrebbe per questo condurre una perpendicolare sulla linea AB. Basterebbe perciò percorrere la linea AB e cercare su questa un punto pel quale ponendo lo squadro, due dei traguardi battendo la linea AB, gli altri due battessero il punto C. È chiaro allora che il punto trovato è il piede della perpendicolare abbassata da C sulla linea AB.

Si può per mezzo dello squadro misurare la distanza da un punto A ad un punto B inaccessibile (fig. 68). Posto lo

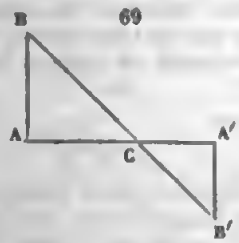
68



squadro in A si batte coi traguardi il punto B, e si prendono sulla perpendicolare AA′ data dagli altri due traguardi AC, e CA′ uguali. Si immagini una retta che passi per B e per C: quindi portando lo squadro in A′ si determini la direzione A′B′ perpendicolare ad AA′, e si cammini su questa direzione sinchè si trovi un punto B′ all'incontro di A′B′ con la linea BC prolungata: la linea A′B′ sarà uguale ad AB, e misurando questa linea avremo la distanza dal punto A al punto B inaccessibile. Di fatti i triangoli ABC A′B′C sono uguali perchè hanno il lato AC uguale ad A′C, gli angoli in C uguali perchè opposti al vertice, gli angoli A ad A′ retti.

Se si fosse presa CA′ (fig. 69) uguale

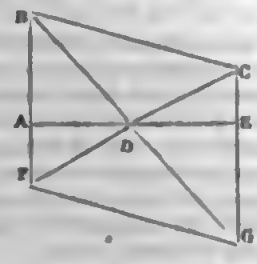
69



alla metà, a un terzo ec. di CA si avrebbe avuto A′B′ uguale alla metà, ad un terzo ec. di AB.

Per misurare la distanza tra due punti B e C inaccessibili (fig. 70) basta abbas-

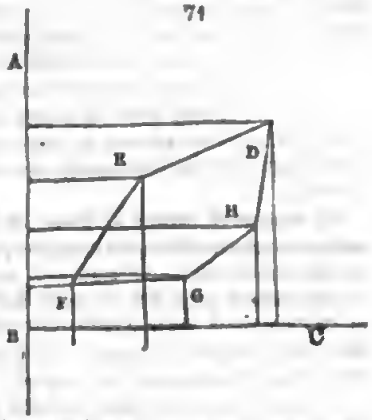
70



sare per mezzo delle squadre dai punti B e C due perpendicolari BA, CE sulla linea AE, per il mezzo D della linea AE condurre due rette BD, CD, determinare gl' incontri F e G di queste rette prolungate con le perpendicolari che passano per B e C prolungate al disotto della AE, e misurare la FG le quale sarà uguale alla BC.

Per riprendere per mezzo dello squadro il contorno di un poligono DEFGH (figura 71), si conducono due rette AB

71



BC perpendicolari tra loro, dai vertici del poligono si abbassano sulla BC le perpendicolari, si misura la distanza del piede di ciascuna perpendicolare al punto B percorrendo la BC, e si misurano le lunghezze di ciascuna delle perpendicolari o direttamente e percorrendo la AB.

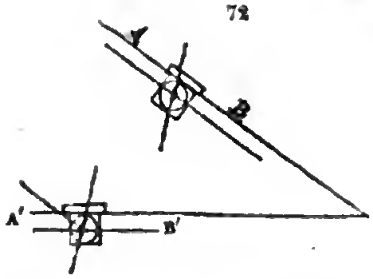
Il mezzo stesso serve per riportare per mezzo dello squadro sul terreno un poligono dato.

Se si trattasse di un contorno curvilineo, bisognerebbe ravvicinare assai le perpendicolari per ottenere una discreta approssimazione.

Gli istrumenti che servono alla misura degli angoli sono di due specie, alcuni danno l'angolo graficamente, altri danno la misura dell'angolo in gradi minuti ec.

Fra questi è la *bussola* (fig. 72) la quale si compone di una cassetta quadra che porta un circolo graduato nel suo interno, e lungo uno dei lati AB un cannocchiale, o i traguardi; al centro del circolo un pernio sostiene un ago calamitato, perfettamente libero. L'ago mantiene la sua direzione costante, mentre si fa girare la scatola o il cannocchiale, di-

72



rigendo questo sulla linea che si vuol battere. Se la linea battuta è nella direzione dell'ago, la punta nord di esso corrisponde alla divisione *zero* del cerchio graduato; se la linea devia da questa direzione di un certo numero di gradi a la punta nord dell'ago corrisponde alla divisione a.

Se dopo aver battuta la linea AB la quale supporremo deviasse dalla direzione dell'ago un numero di gradi a, si batte una seconda linea A'B', la quale devia di un numero di gradi a' dalla direzione dell'ago, l'angolo che fanno le due linee tra loro sarà la differenza tra a ed a'.

Gli angoli osservati colla bussola si riportano sul disegno per mezzo di un semicerchio graduato (pag. 93) nel modo seguente. Si conducono sul foglio di disegno tante linee parallele quante occorrono, e facendo percorrere al semicerchio una di queste parallele, in modo che il centro del cerchio e la divisione 34.° per esempio che corrisponde all'angolo osservato camminino lungo questa retta, è chiaro che il diametro del semicerchio farà sempre con questa l'angolo osservato 34°, e che tracciando col lapis una linea lungo questo diametro, essa avrà la direzione sul disegno corrispondente a quella della linea battuta col cannocchiale della bussola. Se questa linea deve passare per un punto dato qualunque sul disegno, bisognerà far camminare il centro e la divisione 34.° del semicerchio lungo la linea più vicina al punto dato, finchè il diametro del semicerchio graduato passi il punto dato sul disegno. Se si misura un lato di un triangolo e si prendono con la bussola gli angoli adiacenti, si potrà costruire per mezzo della scala e del cerchio graduato un triangolo simile sul disegno.

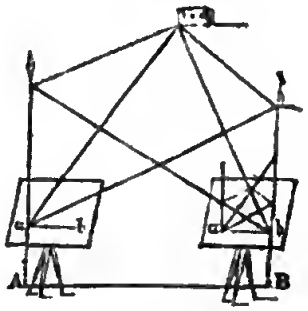
Percorrendo colla bussola i vertici di un poligono per prendere gli angoli e misurandone i lati, si potrà costruire nel disegno colla scala e col cerchio graduato un poligono simile a quello percorso sul terreno.

Per mezzo della *tavoletta* si ottiene graficamente l'angolo di due linee battute dai cannocchiale o dai traguardi (pag. 107).

L'istrumento si compone di una tavoletta, che si dispone orizzontale sopra il suo piede, e di una *linda* che porta due traguardi o un cannocchiale. Ponendo la linda sulla tavoletta, e facendola muovere fino a che i traguardi o il cannocchiale battano la linea voluta sul terreno, la riga si pone nella direzione della linea battuta; direzione che noi fisseremo sul foglio del disegno tracciando col lapis una retta lungo il lato della riga. Se si batte coi traguardi una seconda linea, e si traccia col lapis una seconda retta, questa incontrerà la prima, e le due rette condotte sul foglio di disegno faranno un angolo uguale a quello delle due direzioni battute sul terreno. Noi avremo allora quest'angolo descritto graficamente sul disegno, mentre con la bussola avevamo la misura dell'angolo in gradi.

Perchè l'operazione sia esatta è necessario che una volta disposta la tavoletta orizzontale sul punto A (fig. 73)

73



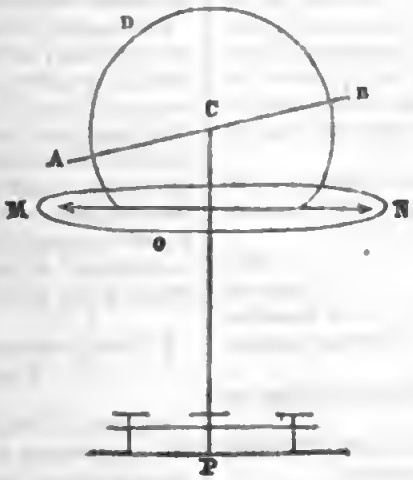
questa non sia mossa nel corso dell'operazione. Ci dovremo assicurare che questa condizione è soddisfatta, avanti di abbandonare la stazione A, riportando la riga sulla direzione delle rette tirate, ed osservando se i traguardi coprono tuttora esattamente le linee del terreno corrispondenti. Se ciò accade si dice che la tavoletta è rimasta *orientata*.

ORIENTARE LA TAVOLETTA. Lasciando il punto A per andare a fare stazione in B bisogna in questo punto *orientare* la tavoletta. Si farà coincidere la riga con la direzione *a b* di quella linea sul disegno che corrisponde ad AB sul terreno; si farà poi girare la tavoletta fino a che i fili dei traguardi coprano il punto A, battendo da B la linea stessa AB che avevano battuta dal punto A; tutte le linee del disegno condotte per *a*, che avevamo tracciate facendo stazione in A, avranno preso una posizione parallela a quella che avevano precedentemente e la tavoletta sarà orientata.

Quando la misura degli angoli deve essere fatta con molta esattezza, non possiamo contentarci delle operazioni grafiche descritte precedentemente, le quali non possono giungere a darci un angolo con una approssimazione maggiore di un mezzo grado, ma bisogna ricorrere agli istrumenti i quali sono capaci di valutare ancora i secondi come il *cerchio ripetitore* ed il *teodolito*.

La costruzione e l'uso di questi istrumenti esige delle descrizioni minute che non si adattano all'indole di questa pubblicazione; tuttavia avremo un idea del teodolito immaginando (fig. 74) un cer-

74



chio orizzontale MON graduato, sostenuto da un piede P, traversato da un asse verticale CP intorno al quale girano il cerchio ADB ed il cannocchiale AB, formando tutto un sistema, e trasportando seco loro un indice, il quale cammina sul cerchio graduato MON e misura gli angoli che fanno tra loro i piani verticali corrispondenti alle diverse posizioni del sistema.

Il cannocchiale AB gira attorno ad un asse orizzontale che passa per il punto C, prendendo un inclinazione all'orizzonte la quale è misurata dalla graduazione del circolo ADB per mezzo di un secondo indice, gli indici sono provveduti di un nonio e di un microscopio per leggere le divisioni del nonio. Il piede P posa sopra viti ed è provveduto di livelli a bolla d'aria per disporre l'asse CP verticale, e di un secondo cannocchiale per verificare che non si è mosso nel tempo della operazione. Le viti di richiamo ed i congegni i più delicati servono alle rettificazioni che sono indispensabili negli istrumenti di gran precisione.

§ 8. *Delle linee e dei piani considerati nello spazio.*

Due rette che si tagliano, due rette parallele, o tre punti non in linea retta determinano la posizione di un piano. Un piano può essere dunque considerato come generato da una retta la quale si muove appoggiandosi sopra altre due che si tagliano.

Questo modo di generazione del piano si realizza nel formare i mattoni e tutto

il materiale quadro per muramento, nel segare i legnami ed i marmi e in molte arti meccaniche.

L'intersezione di due piani è una retta.

Se una retta è perpendicolare a due altre che si tagliano al suo piede in un piano, è perpendicolare a tutte le altre rette che passano per il suo piede poste nel piano stesso, e chiamasi perpendicolare al piano.

Le oblique ugualmente lontane dal piede della perpendicolare sono uguali; di due oblique diaugualmente lontane, la più lunga è quella che se ne discosta di più.

Se in un piano due linee si incontrano ad angolo retto, e l'una di esse contiene il piede d'una perpendicolare al piano nel quale giace l'angolo retto, congiungendo un punto qualunque della perpendicolare al piano col vertice dell'angolo retto, le rette così condotte sono tutte perpendicolari alla altra retta esistente nel piano dato.

Se una retta è perpendicolare ad un piano, ogni retta parallela alla prima sarà perpendicolare a questo piano.

Se una retta è parallela ad un'altra condotta in un piano, sarà parallela anco al piano, cioè non si potrà incontrare col piano a qualunque distanza si prolunghino.

Due piani perpendicolari alla stessa retta sono paralleli.

Le intersezioni di due piani paralleli con un terzo sono linee parallele.

Le rette parallele comprese tra due piani paralleli sono eguali, e due piani paralleli sono per tutto ugualmente distanti.

Se due angoli non situati nello stesso piano hanno i loro lati paralleli e diretti nel medesimo senso, questi angoli sono uguali e i loro piani sono paralleli.

Due rette comprese fra tre piani paralleli sono tagliate in parti proporzionali.

L'angolo che fanno due piani ossia la loro scambievole inclinazione, può essere misurato dall'angolo che fanno tra loro le perpendicolari condotte in ciascuno dei piani per uno stesso punto della loro comune intersezione. Quest'angolo chiamasi angolo diedro.

Tutti i piani che passano per una perpendicolare ad un altro piano sono perpendicolari a questo; formano cioè con questo un angolo diedro retto.

La intersezione comune di due piani perpendicolari ad un terzo è una perpendicolare a questo piano.

Si chiama angolo solido o angolo poliedro la porzione di spazio compreso tre più piani che si riuniscono in un punto.

In un angolo solido compreso da tre angoli piani, che chiamasi angolo triedro, la somma di due angoli piani è più grande del terzo.

La somma degli angoli piani che formano un angolo solido è sempre minore di quattro retti.

Se due angoli solidi sono composti di tre angoli piani respettivamente uguali, i piani nei quali sono gli angoli uguali sono ugualmente inclinati.

Sebbene due triedri siano uguali in tutte le loro parti, cioè facce e negli angoli diedri, è necessario perchè possano sopraporsi l'uno all'altro che queste parti sieno disposte nello stesso ordine. Quando manca questa ultima condizione i due triedri sono *simmetrici* l'uno dall'altro. Possiamo farci una idea esatta di questa disposizione immaginando che l'uno di essi sia rispetto all'altro la sua immagine riflessa in uno specchio.

§ 9. *Solidi terminati da facce piane o curve.*

Poliedri. Si chiama poliedro un solido terminato da piani o facce piane; questi piani sono necessariamente terminati da linee rette che chiamansi *coste* del poliedro.

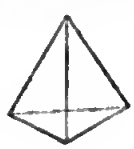
Chiamasi tetraedro il solido che ha quattro facce, ed è il più semplice di tutti i poliedri: esaedro quello che ne ha sei: ottaedro quello che ne ha otto: dodecaedro quello che ne ha dodici: icosaedro quello che ne ha venti ec.

Si chiama poliedro regolare quello le cui facce sono dei poligoni regolari uguali, e gli angoli solidi uguali.

Vi sono cinque soli poliedri regolari:

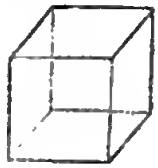
1° Il tetraedro regolare le cui facce sono triangoli equilateri (fig. 75).

75



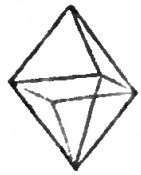
2° L' esaedro regolare o cubo le cui facce sono quadrati (fig. 76).

76



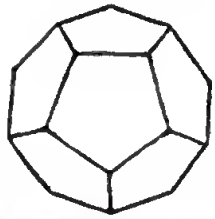
3° L' ottaedro regolare le cui facce sono triangoli (fig. 77).

77



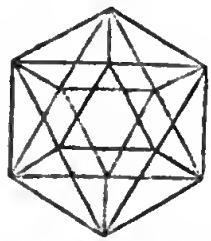
4° Il dodecaedro le cui facce sono pentagoni (fig. 78).

78



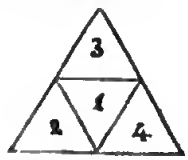
5° L' icosaedro le cui facce sono triangoli (fig. 79).

79

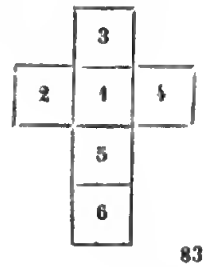


Le figure 80, 81, 82, 83, 84 rappresentano respettivamente li sviluppi delle superfici esteriori dei poliedri regolari nell' ordine nel quale sono stati enumerati. Intagliando un cartone sottile secondo un disegno simile a quello delle figure, e raccogliendo i diversi poligoni che lo compongono nell' ordine indicato dalle cifre, si formano dei solidi vuoti che rappresentano i poliedri regolari.

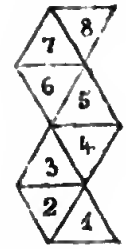
80



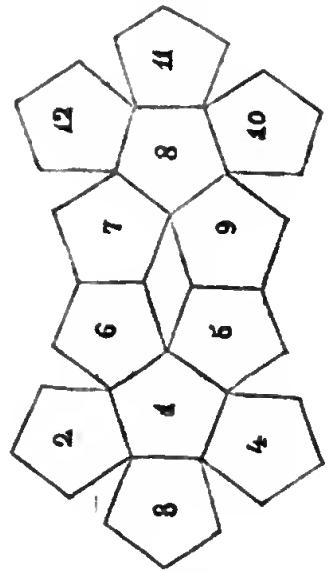
84



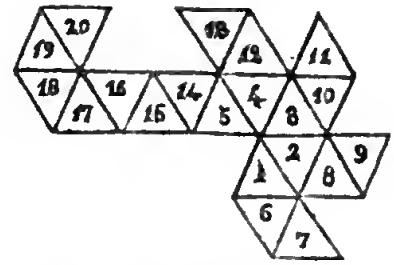
82



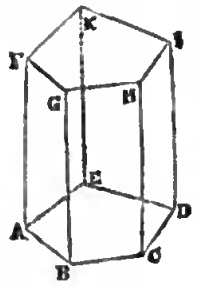
83



81



Il prisma è un solido compreso da piani parallelogrammi, che si riuniscono intorno a due poligoni eguali e paralleli che diconsi *basi* (fig. 85).



85

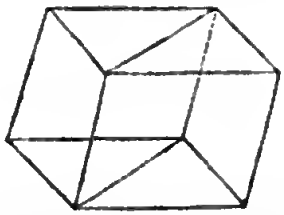
La perpendicolare che misura la distanza delle basi è l'altezza del prisma.

Il prisma è retto se le facce del prisma sono perpendicolari alle basi; se no, è obliquo.

Un prisma è triangolare, quadrangolare, pentagono, esagono, quando la base è un triangolo, un quadrilatero, un pentagono, un esagono.

Il prisma che ha per base un parallelogrammo, ha tutte le facce parallelogramme e chiamasi *parallelepipedo* (fig. 86).

86



Se tutte le facce sono dei rettangoli diceasi parallelepipedo rettangolo.

Il cubo (fig. 76) è un caso particolare del parallelepipedo rettangolo.

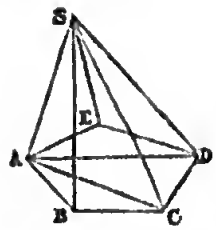
La piramide è un solido chiuso da facce triangolari che partono da uno stesso punto chiamato vertice, e terminano ai lati di un poligono che chiamasi *base* (figura 87).

L'*altezza* della piramide è la perpendicolare abbassata dal vertice sul piano della base prolungato se è necessario.

La piramide è triangolare, quadrangolare ec. se la sua base è un triangolo un quadrilatero ec.

Una piramide è regolare quando la base è un poligono regolare, e la perpendicolare abbassata dal vertice sulla base passa per il centro del poligono. Questa perpendicolare si chiama allora asse delle piramide.

87



I TRE CORPI ROTONDI. La sfera è un solido terminato da una superficie curva, che ha tutti i suoi punti egualmente distanti da un punto interno il quale dicesi centro.

La sfera si può considerare come generata dalla rivoluzione di un semicerchio, che gira attorno al suo diametro.

Il raggio ed il diametro della sfera sono li stessi che quelli del semicerchio generatore.

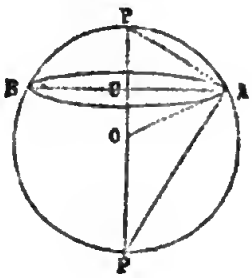
Si chiama zona la parte della superficie della sfera compresa tra due piani paralleli, che ne determinano le basi.

Se uno dei piani è tangente alla sfera la zona non ha che una base, e prende il nome di *calotta sferica*.

Si chiama *segmento sferico* la porzione solida della sfera comprosa tra i due piani paralleli che sono le basi della zona (fig. 88); se uno di questi piani è tangente alla sfera allora il segmento sferico non ha che una sola base (fig. 89); la di-

88

89



stanza dei due pieni paralleli è l'altezza della zona o del segmento sferico.

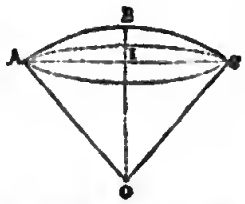
Chiamasi *fuso* la porzione di superficie della sfera compresa tra due posizioni qualunque del semicerchio generatore

Si chiama *cuneo sferico* o *unghia sferica* la parte solida della sfera compresa tra due posizioni del cerchio generatore, la quale ha per base il fuso (fig. 90).

90

Mentre il semicerchio girando attorno al suo diametro genera la sfera, un settore circolare (fig. 91) genera un solido

91



ABCO che chiamasi settore sferico.

Il *cilindro retto* (fig. 92) è il solido

92

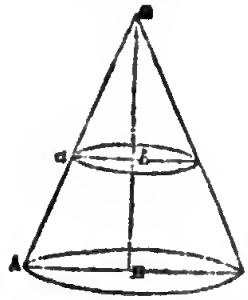
prodotto dalla rivoluzione di un rettangolo attorno ad uno dei suoi lati che è l'*asse* o l'*altezza* del cilindro. In questo movimento i due lati perpendicolari all'asse descrivono due cerchi che sono le basi del cilindro; il lato parallelo all'asse descrive la superficie convessa del cilindro.

Il cilindro può considerarsi come un prisma retto le cui basi sono cerchi, o poligoni regolari di un numero infinito di lati.

Il cilindro obliquo è un prisma obliquo che ha per basi due cerchi.

Si chiama cono retto (fig. 93) il solido

93



prodotto dalla rivoluzione di un triangolo rettangolo SBA intorno ad uno dei lati SB dell'angolo retto. In questo movimento l'altro lato AB descrive nel suo moto un cerchio che è la *base del cono*, e l'ipotenusa descrive la superficie convessa del cono.

Il punto S chiamasi il vertice del cono, SB l'asse o l'altezza e l'ipotenusa SA lato o apotema del cono.

Si può considerare ancora il cono come una piramide che abbia per base un cerchio o un poligono regolare di un numero di lati infinito, ed abbia il vertice sulla perpendicolare alzata sul centro della base.

Il cono obliquo è una piramide obliqua che ha per base un cerchio.

Togliendo una porzione di cono dal cono intero per mezzo di una sezione parallela alla base, il solido che resta compreso tra il piano secante e la base prende il nome di *cono troncato* o *tronco di cono*; questo solido può considerarsi generato dalla rivoluzione di un trapezio rettangolare AB*ba* attorno al lato B*b* perpendicolare alle basi.

Il lato immobile B*b* dicesi *l'asse* o *l'altezza* del tronco, i cerchi generati da *ab* ed AB sono le basi del tronco ed A*a* il lato.

§ 10. *Misura della superficie e dei volumi dei corpi.*

Il volume di un parallelepipedo ed in generale quello di un prisma qualunque è uguale al prodotto della base per l'al-

tezza; o in altri termini moltiplicando il rapporto della base all'unità di superficie, per il rapporto della altezza all'unità lineare, questo prodotto esprime il rapporto del volume del solido che si considera all'unità di volume, ossia al cubo che ha per lato l'unità di lunghezza. Se la base si chiama B e l'altezza a l'espressione algebrica di questo volume è Ba.

Il volume di una piramide qualunque è uguale al terzo del prodotto della base per l'altezza. Questa misura in termini algebrici si esprime con $\frac{1}{3}\ Ba$.

Il volume di un tronco di piramide ha per misura il terzo del prodotto della sua altezza per la base superiore, per la base inferiore e per una media proporzionale geometrica tra queste due; chiamando b, B le basi del tronco, sarà la media geometrica $\sqrt{b\,B}$, e il tronco sarà equivalente a tre piramidi che abbiano per basi b, B, $\sqrt{b\,B}$ e per altezza l'altezza del tronco a. L'espressione algebrica di questo volume sarà

$$\frac{1}{3}\ a\left(B + \sqrt{Bb} + b\right)$$

Un prisma triangolare troncato ha per misura il terzo del prodotto della sua base B per la somma delle distanze dei tre vertici del prisma a questa base. Chiamando queste distanze a, a', a'', l'espressione algebrica di questo tronco di prisma è

$$\frac{1}{3}\ B\left(a + a' + a''\right)$$

La superficie convessa di un prisma retto è il perimetro della base moltiplicato per l'altezza del prisma.

La superficie convessa di un cilindro retto è uguale al prodotto della circonferenza della base per l'altezza; ossia a $2\pi ra$, essendo $\pi = 3,1415927$ il rapporto della circonferenza al diametro, r *il raggio* della base ed a l'altezza del cilindro.

Il volume del cilindro è uguale al prodotto dell'area della base per l'altezza; ossia $\pi r^2\ a$.

La superficie convessa di un cono è uguale alla metà del prodotto della circonferenza della base per l'apotema l; ossia πrl.

Il volume di un cono è uguale al terzo del prodotto dell'area della base per l'altezza, ossia $\frac{1}{3}\ \pi r^2\ a$.

La superficie convessa di un tronco di cono è uguale alla metà del prodotto del lato per la somma delle circonferenze delle due basi; questo prodotto è $\pi l\ (r + r')$.

Il volume di un tronco di cono è uguale al terzo del prodotto dell'altezza del tronco a per la somma delle basi superiore, inferiore, e di una media geometrica tra queste due. Il che si esprime algebricamente con

$$\frac{1}{3}\ \pi a\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

I resultati relativi al cilindro, al cono, al tronco di cono si deducono da quelli relativi al prisma retto, a una piramide regolare, ad un tronco di piramide regolare, supponendovi infinitamente grande il numero dei lati del poligono regolare, che serve di base al cilindro o alla piramide.

La superficie della sfera di raggio r è uguale al prodotto del diametro d per la circonferenza del circolo generatore, ossia a quattro volte questo circolo; il che dà $4\ \pi\ r^2 = \pi\ d^2$.

Il volume della sfera è uguale al prodotto della superficie della sfera per il terzo del raggio; questo prodotto è espresso da $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3$ oppure da $\frac{1}{6}\ \pi\ d^3$.

La superficie di una zona sferica è uguale al prodotto della sua altezza a per la circonferenza del circolo generatore $2\pi r$; questo prodotto è $2\pi ra$.

Un settore sferico ha per misura la zona che gli serve di base moltiplicata per il terzo del raggio; questo prodotto è

$$\frac{2}{3}\ \pi\ r^2 a.$$

Ogni segmento di sfera compreso tra due piani paralleli, ha per misura la semisomma delle basi moltiplicato per l'altezza del segmento, più una sfera che abbia per diametro questa stessa altezza. Siano R e r i raggi delle due basi ed a

l'altezza del segmento, questa misura sarà espressa da

$$\frac{1}{3}\pi a\left(R^2+r^2\right)+\frac{1}{2}\pi a^2$$
$$=\frac{1}{2}\pi a\left(3R^2+3r^2+a^2\right)$$

Ogni poliedro può decomporsi in piramidi, che abbiano il loro vertice lo un punto posto nell'interno del poliedro, e che abbiano per basi le differenti facce del poliedro; quindi si può valutare il volume di un poliedro qualunque.

Prendendo per vertice comune delle piramidi uno dei vertici a del poliedro, e ciascuna delle facce opposte a questo vertice per base di ciascuna piramide, si troverà l'altezza di ciascuna piramide abbassando dal vertice a una perpendicolare sul piano di ciascuna faccia, e in altri termini ponendo ciascuna faccia sopra un piano orizzontale, e abbassando dal vertice a del poliedro una verticale su questo piano. La misura del poliedro è la somma dei prodotti di ciascuna faccia per $\frac{1}{3}$ dell'altezza della piramide corrispondente.

Considerando il semicerchio che colla sua rivoluzione intorno al diametro genera la sfera: e il rettangolo che ha per altezza questo diametro, e per base una retta uguale al raggio e tangente al semicerchio, si vede che questo rettangolo genera il cilindro circoscritto alla sfera.

La superficie della sfera sta alla superficie totale di questo cilindro (comprese vi le due basi) nel rapporto di 2 a 3; i volumi dei due solidi sono nello stesso rapporto.

Questa bella proposizione è stata dimostrata da Archimede, il quale volle che essa fosse incisa sulla sua tomba; e fu nel vedere una figura che rappresentava la sfera inscritta nel cilindro che Cicerone, allora questore in Sicilia, scoprì il luogo dove era sepolto il gran geometra, che i suoi ingrati compatriotti avevano dimenticato, meno di due secoli dopo la di lui morte.

§ 11. *Proprietà della figura alla superficie della sfera.*

Ogni piano perpendicolare alla estremità del raggio è tangente alla sfera, essia non ha con essa di comune che un punto.

Ogni sezione fatta nella sfera è un circolo, la cui grandezza dipende dalla distanza del piano secante al centro della sfera.

Si chiamano circoli massimi quelli il cui piano passa per il centro, e circoli piccoli tutti gli altri. I circoli massimi sono tutti uguali tra loro e al circolo generatore.

Tre archi di circolo massimo, che si tagliano alla superficie della sfera determinano una figura che si chiama triangolo sferico.

I sei elementi di un triangolo sferico sono i tre lati o archi di circolo massimo sulla superficie della sfera, e i tre angoli diedri che fanno tra loro i piani in cui giacciono questi archi. Questi piani sono quelli, che condotti per il centro della sfera hanno determinato gli archi corrispondenti.

Ogni triangolo sferico corrisponde ad un triedro il cui vertice è al centro della sfera, gli angoli diedri di questo sono gli angoli diedri del triangolo sferico; e gli angoli piani hanno per misura i lati del triangolo sferico.

Nel modo istesso ogni poligono sferico corrisponde coi suoi angoli ai diedri di un angolo solido il cui vertice è al centro della sfera, e misura coi suoi lati gli angoli piani che concorrono al vertice dell'angolo solido.

Il più corto cammino da un punto ad un altro sulla superfice sferica è l'arco di circolo massimo che unisce i due punti dati.

In un triangolo sferico un lato qualunque è più piccolo della somma degli altri due, e più grande della loro differenza.

La somma dei lati di un poligono sferico è minore della circonferenza di un gran cerchio.

Un diametro della sfera perpendicolare al piano di un cerchio tracciato sopra di essa, incontra la superficie della sfera in due punti ugualmente lontani da tutti i punti della circonferenza di questo cerchio, che sono *i poli* del cerchio, e di tutti i paralleli a questo descritti sulla superficie della sfera.

Se da tutti i vertici di un triangolo sferico come poli si descrivono degli archi di circolo massimo, con intervallo uguale

ad un quadrante (quarto di circonferenza di un circolo massimo) il nuovo triangolo formato dalla intersezione di questi archi si chiama triangolo *polare* per riapetto al primo.

Viceversa i vertici di questo sono i poli del precedente.

Gli angoli di questi triangoli hanno per misura ciascuno la mezza circonferenza meno il lato opposto nel triangolo polare.

Le proposizioni sulle relazioni dei triangoli sferici tra loro sono affatto analoghe a quelle che hanno luogo sui triangoli rettilinei. Solamente i triangoli sferici possono essere uguali tra loro in tutte le parti, senza che per questo siano sovrapponibili; ed allora ha luogo come nei triedri l'uguaglianza di simmetria (pag 112).

Due triangoli situati sulla medesima sfera o sfere uguali sono uguali in tutte le loro parti;

1° Quando hanno un angolo eguale compreso tra lati respettivamente uguali.

2° Quando un lato e gli angoli adiacenti sono respettivamente uguali.

3° Quando hanno i tre lati uguali respettivamente.

4° Quando hanno tre angoli respettivamente uguali.

Questa ultima proposizione non ha luogo nei triangoli rettilinei, nei quali dalla uguaglianza degli angoli non si può concludere che la proporzionalità dei lati. Questa differenza è dovuta all'essere determinato il raggio della sfera sulla quale sono descritti i triangoli.

Se si trattasse di triangoli tracciati sopra sfere di raggi differenti, l'uguaglianza degli angoli diedri non condurrebbe che alla uguaglianza degli angoli piani al centro, e alla somiglianza degli archi intercetti da questi sopra la sfera; ma sopra sfere eguali i triangoli non possono essere simili senza essere uguali.

La somma degli angoli di ogni triangolo sferico deve essere minore di sei, e maggiore di due angoli retti.

Il rapporto della superficie di un triangolo sferico qualunque alla superficie della sfera è espresso dalla ottava parte dell'eccesso della somma dei tre angoli del triangolo sopra due angoli retti; l'angolo retto essendo preso per unità.

Il rapporto della superfice di un poligono sferico convesso (che non ha angoli rientranti) alla superficie della sfera è uguale all'ottava parte dell'eccesso della somma dei suoi angoli aumentata di quattro retti sopra un numero di retti doppio del numero dei lati del poligono.

Una delle più notabili conseguenze di queste proposizioni è questa; che il numero S degli angoli solidi di un poliedro aumentato del numero F delle sue facce è sempre uguale al numero A delle costole aumentato di due: il che si esprime algebricamente

$$S + F = A + 2.$$

§ 12. *Della similitudine e delle relazioni delle figure nello spazio.*

Due *piramidi triangolari* si dicono *simili* quando hanno un angolo diedro uguale compreso tra due facce respettivamente simili e similmente disposte.

L'avverarsi di queste condizioni induce la similitudine di tutte le altre facce omologhe, l'eguaglianza degli angoli solidi omologhi, la proporzionalità tra tutte le costole omologhe, e l'uguaglianza tra gli angoli diedri omologhi.

Cinque condizioni sole sono necessarie perchè due piramidi triangolari sieno simili, e tra i diversi enunciati si quali può dar luogo la scelta delle condizioni si distingue la seguente. Due piramidi triangolari sono simili quando hanno i lati omologhi proporzionali.

Due *poliedri* si dicono *simili*, quando avendo le basi simili, i vertici degli angoli solidi omologhi al di fuori di queste basi sono determinati da piramidi triangolari simili respettivamente e similmente disposte.

Da questa definizione risulta che due poliedri simili hanno le facce omologhe simili e gli angoli solidi omologhi uguali; che i lati, le diagonali, e generalmente le linee omologhe sono in un rapporto costante; che i due poliedri si possono dividere in uno stesso numero di piramidi triangolari respettivamente simili e similmente disposte.

I volumi di due poliedri simili stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi.

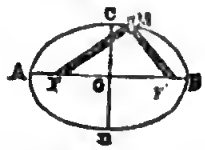
Due coni o *due cilindri* diconsi *simili* quando sono generati da triangoli o da rettangoli simili.

Due coni o *due cilindri* simili stanno tra loro come i cubi dei lati omologhi.

§ 13. *Di alcune linee curve, e specialmente delle sezioni del cono.*

L' ELLISSE è una linea curva (fig. 94)

94



nella quale la distanza di ciascuno dei suoi punti a due punti fissi F ed F' è costante.

L' ellisse può descriversi per mezzo di un movimento continuo sul terreno o sul foglio, tenendo fissi i due capi di una corda o di un filo ai punti F ed F', e facendo camminare lungo la corda tesa un anello armato di una punta o di un lapis M.

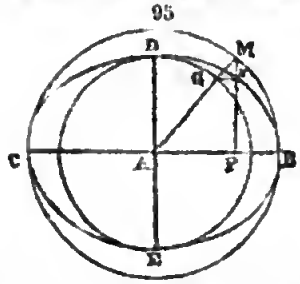
I punti FF' si chiamano i fuochi, e l'ellisse è simmetrica per rispetto alla linea dei fuochi AB e per rispetto alla linea CD perpendicolare sul mezzo di essa. AB prende il nome di asse maggiore e CD quello di asse minore. Il punto O dicesi centro dell' ellisse, OF' è l' eccentricità, FM ed F'M diconsi raggi vettori.

La lunghezza AB dell' asse maggiore è uguale alla somma dei raggi vettori condotti da un punto qualunque della curva ai fuochi.

L' ellisse può descriversi per mezzo dei suoi assi in vari modi.

1° Si descrivono (fig. 95) due circon-

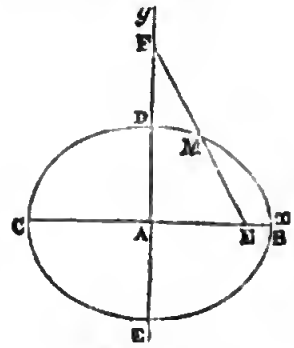
95



ferenze concentriche che hanno per diametri gli assi dell' ellisse, si conduce dal centro un raggio AM che incontra le due circonferenze in G ed M respettivamente, dal punto G si conduce una parallela all' asse maggiore dal punto M una perpendicolare, l' incontro di queste due rette determina un punto N dell' ellisse. Con questo mezzo si ottengono quanti punti si vogliono della curva.

2° Si conducono due assi Ax, Ay, (figura 96) e nell' angolo retto xAy si fa muo-

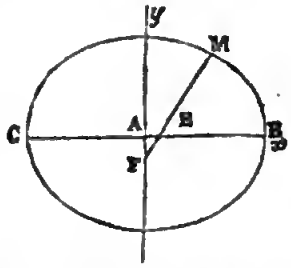
96



vere una riga FE, in modo che i capi F ed E rimangano sempre sopra Ay ed Ax respettivamente; si prende la lunghezza FE uguale alla semisomma degli assi dell' ellisse e la lunghezza FM uguale al semi asse maggiore, il punto M descrive allora l' ellisse.

3° Si conducono (fig. 97) due linee Ax

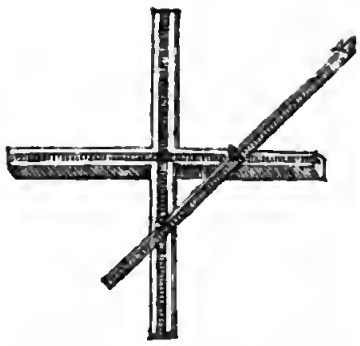
97



Ay ad angolo retto; si prende sulla riga FM la lunghezza FM uguale al semi asse maggiore, la lunghezza ME uguale al semiasse minore, si fa muovere la riga in modo che i capi F, E rimangano respettivamente sopra Ay e sopra Ax, allora il punto M descriva l' ellisse.

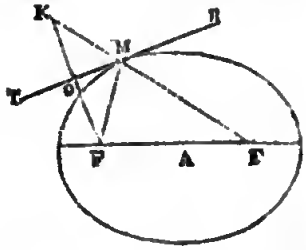
Si vede facilmente che l' istrumento rappresentato dalla (fig. 98) può servire a tracciare l' Ellisse, dando una posizione conveniente ai capi che devono scorrere nelle guide rettangolari e al tiralinee fisso sulla riga.

98



Per condurre una tangente all' ellisse per un punto M dato sulla curva, si condurranno i raggi vettori FM F'M (fig. 99)

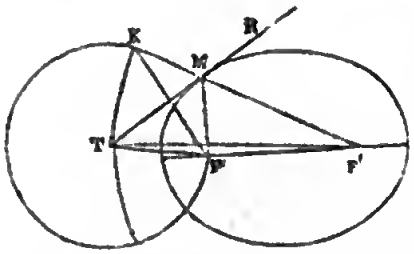
99



si prolunga uno di essi di una quantità MK uguale all' altro, si congiunge F e K e si tira alla FK una perpendicolare MT dal punto M, la linea TMR è la tangente cercata.

Se il punto T fosse dato fuori della curva (fig. 100) bisognerebbe determina-

100



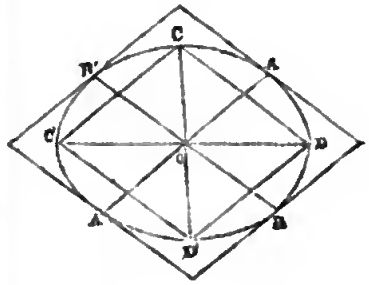
re prima K facendo intersecare due archi di cerchio, descritti l'uno dal punto T con raggio TF l'altro dal punto F' con raggio uguale al grande asse, quindi riunire la interaezione K con F'; la linea F'K incontra la curva in M e determina il punto di contatto.

La TM rimane perpendicolare ad FK come si vede dalla figura.

Una linea retta AA' o BB' che passa per il centro dell' Ellisse si chiama diametro.

Due diametri AA', BB' si dicono coniugati l'uno dell' altro quando, sono respettivamente paralleli ciascuno alla tangente condotta all'estremità dell'altro (fig. 101)

101



In tal caso ciascuno divide per metà le corde CD, CC' parallele all' altro.

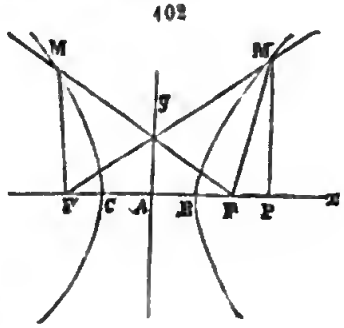
Se da uno stesso punto C preso sull'ellisse si conducono due corde CC', CD respettivamente parallele ai diametri coniugati AA', BB', le due corde diconsi supplementari l'una dall' altra, esse passano per l'estremità di un nuovo diametro DC'.

Il parallelogrammo costruito sopra due diametri coniugati è equivalente al rettangolo costruito sugli assi, la somma dei quadrati di due diametri coniugati è costante ed uguale alla somma dei quadrati dei due assi.

L'area dell'ellisse è uguale a quella di un cerchio il cui raggio sia medio proporzionale tra i due semiassi a e b dell' ellisse, o più brevemente è uguale a $\pi\, a\, b$.

Nell' IPERBOLA (fig. 102) la differenza

102

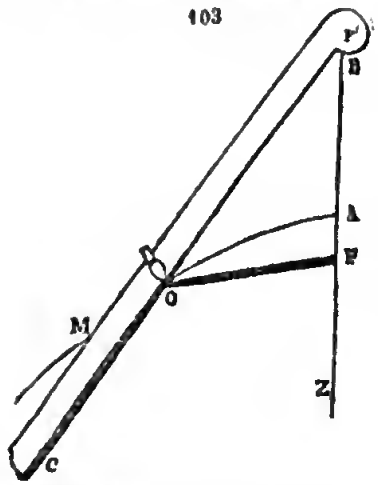


delle distanze MF, MF' di ogni punto della curva a due punti fissi chiamati fuochi è costante ed uguale all'*asse traverso* BC.

Questa curva si compone di due branche indefinite disposte simmetricamente per rapporto ai due assi A*x*, A*y*.

Può essere descritta con un movimento continuo, fissando il capo di una corda (fig. 103) al fuoco F, e facendo muovere

103

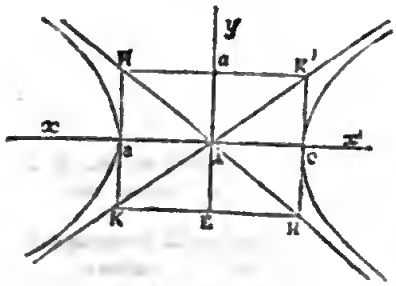


un anello armato di una punta lungo la riga che gira a cerniera intorno all'altro fuoco F', in modo che l'anello tenga tesa la corda, lasciandone scappare porzioni uguali alli spazii, che l'anello descrive sulla riga.

L'iperbole può anco essere descritta per punti, che si determinano per mezzo di archi di cerchio i quali hanno i centri in F ed F' e dei raggi che differiscono di una quantità uguale all'asse traverso.

Se prendendo per cateto metà dell'asse traverso, si descrivono due triangoli rettangoli ABH, ACK', (fig. 104), che

104



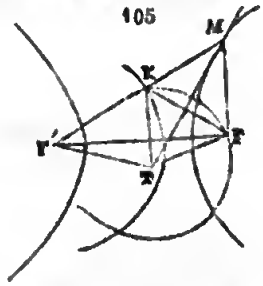
abbiano per ipotenusa la distanza dal centro A al fuoco, le rette AH, AK' diconsi asintoti.

Hanno queste la proprietà rimarchevole di avvicinarsi indefinitamente alle branche della curva che si prolungano in quattro sensi differenti senza potere mai toccare la curva stessa.

DE dicesi il *secondo asse* dell'iperbole.

Per condurre una tangente all'iperbole per un punto M (fig. 105) dato sulla curva,

105



bisogna dividere in due parti uguali l'angolo FMF' dei raggi vettori FM, F'M; il che può farsi prendendo MK = MF, ed abbassando dal punto M una perpendicolare su KF.

Se il punto dato T fosse esterno alla curva, si determinerebbe il punto K facendo interaecare due archi di cerchio, descritti l'uno con centro T e raggio TF, l'altro con centro F' e raggio uguale all'asse trasverso; allora la tangente è perpendicolare a KF, ed il punto di contatto si trova sulla TM all'incontro della F'K prolungata.

Le proprietà della iperbole relative ai diametri coniugati e alle corde supplementari sono interamente analoghe a quelle dell'ellisse, solamente modificate in questo che la differenza dei quadrati fatti su due diametri coniugati, è uguale alla differenza dei quadrati costruiti sugli assi.

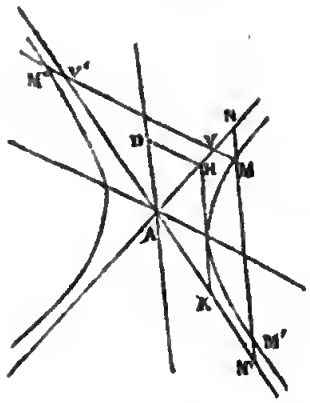
Gli asintoti dell'iperbole coincidono con le diagonali del parallelogrammo costruito su due diametri coniugati qualunque.

L'area del parallelogrammo formato sugli asintoti dell'iperbole, conducendo da un punto della curva delle parallele agli asintoti, è l'ottava parte del rettangolo degli assi o del parallelogrammo fatto con due diametri coniugati.

È facile dati gli asintoti e un punto M della curva costruire l'iperbole per punti;

(fig. 106) perchè conducendo per M una

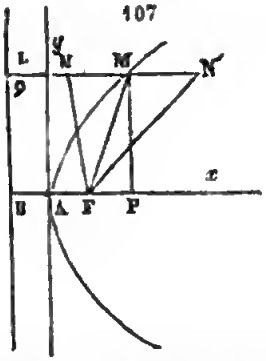
106



retta qualunque e prolungandola fino all'incontro degli asintoti in N ed N' si prenderà N'M' = NM, o si avrà che M' è un secondo punto della curva, si ripeterà questa costruzione conducendo per M una seconda retta e si avrà un altro punto, e così seguitando si avranno quanti punti si vogliono; per l'altra braoca della iperbola si prenderà VM = V'M' e così successivamente.

La parabola (fig. 107) è una curva che

107



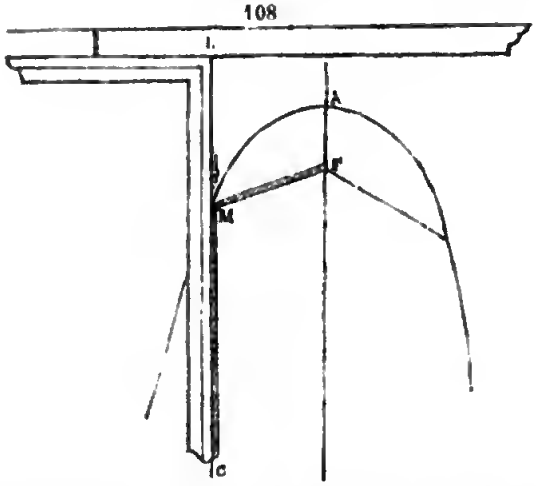
ha tutti suoi punti alla stessa distanza da un punto F che dicesi fuoco e da una retta BL che chiamasi direttrice.

Si compone di due rami disposti simmetricamente al disotto e al disopra dell'asse Ax, il quale è perpendicolare alla direttrice e passa per il fuoco; il punto A dicesi vertice.

Il vertice è posto a mezzo della distanza tra il fuoco o la direttrice. Il doppio di questa distanza dicesi parametro.

Dalla definizione stessa della curva risulta il modo di descriverla con un movimento continuo, come si vede alla (figura 108). Un capo del filo è fisso al fuoco F, un lato di una squadra scorre lungo la direttrice, lungo l'altro lato della squadra scorre un anello M armato di un lapis, il quale descrive la parabola lasciando scappare il filo teso luogo il lato della squadra, in modo che si abbia MF = ML.

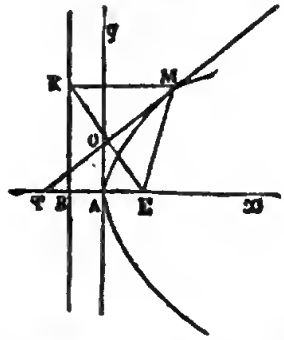
108



La parabola può considerarsi come una ellisse il cui grand'asse è infinito.

Per condurre una tangente alla parabola per un punto M dato sulla curva (fig. 109), si conduce il raggio vettore

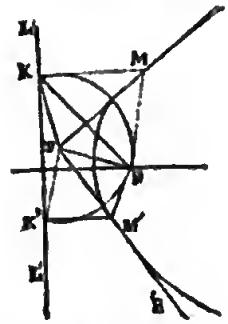
109



EM e si prende sull'asse ET = EM, la TM è la tangente cercata.

Se il punto T per il quale deve essere condotta la tangente è fuori della curva (fig. 110), si determina sulla direttrice

110



LL' il punto K in modo che si abbia TF = TK, e la tangente TM è allora perpendicolare a FK; e il punto di contatto si trova all'incontro di TM con KM parallela all'asse.

Conducendo nella parabola una serie di corde parallele, il mezzo di ciascuna si trova in una stessa linea retta col mezzo di tutte le altre. Questa retta è un diametro, e la tangente alla curva alla estremità di questo diametro è parallela alle corde da esso divise in mezzo.

La parabola è quadrabile, cioè si può per per mezzo della riga e del compasso determinare uno spazio piano, la cui superficie sia uguale a quella di un segmento parabolico qualunque. Se si considera in particolare il segmento compreso tra la curva, uno dei suoi diametri e la semicorda coniugata, si trova questo rimarchevole risultato, che l'area di questo segmento è uguale ai due terzi del parallelogrammo della stessa base e della stessa altezza.

Sezioni del cono e del cilindro. Le tre curve precedenti sono conosciute sotto il nome generico di sezioni coniche. Esse possono di fatto essere ottenute dalla intersezione di un cono o di un piano.

Se il piano taglia l'asse del cono sotto un angolo maggiore di quello che lo tagli la generatrice la sezione è un ellisse. Un piano parallelo ad una delle generatrici del cono, cioè a una delle posizioni dell'ipotenusa del triangolo generatore determina una parabola. Se il piano taglia l'asse del cono sotto un angolo minore di quello che lo tagli la generatrice, determinerà una iperbola.

La seconda branca dell'iperbola si ottiene dallo stesso piano secante, prolungando le generatrici del cono al di là del vertice, in modo da fare una seconda superficie conica uguale alla prima.

Il cerchio stesso non è che un caso dell'ellisse, e si ottiene tagliando il cono retto o il cilindro retto perpendicolarmente all'asse.

Ogni sezione che passa per il vertice del cono o per l'asse del cilindro si riduce a due linee rette che si tagliano al vertice del cono, o che sono parallele all'asse del cilindro.

Se si considerano un cono ed un cilindro obliqui, che abbiano per base un cerchio, le sezioni parallele alla base non sono le sole che sieno circolari. Poichè conducendo un piano per l'asse e per il diametro della base che fa il più grande angolo con l'asse, questo conterrà la sezione meridiana. Ora conducendo un piano secante perpendicolare a questo piano della sezione meridiana, e in modo che faccia con l'asse un angolo uguale a quello della base, ma in senso contrario, la sezione che ne risulterà sarà pure un cerchio. Questa sezione dicesi antiparallela o succontraria.

Proprietà comuni alle sezioni coniche. L'Ellisse, l'iperbola, la parabola hanno delle proprietà comuni importanti, e di queste rammentiamo le principali.

1° Se per il fuoco di una sezione conica si conduce una perpendicolare all'asse fino all'incontro della curva in un pun-

to, e poi si conduce la tangente a questo punto, prolungandola fino all'incontro dell'asse, la perpendicolare all'asse inalzata nel incontro prende il nome di *direttrice* ed ha questa proprietà, che le distanze di un punto qualunque della curva alla direttrice ed al fuoco sono in un rapporto costante. Questo rapporto è più piccolo dell'unità per l'ellisse, più grande dell'unità per l'iperbola, ed uguale all'unità per la parabola.

Si può dunque definire una sezione conica qualonque, determinando il rapporto costante delle distanze di ciascun punto della sezione al fuoco ed alla direttrice.

2° Si può anco dire che la somma o la differenza della distanza di ciascun punto della curva al fuoco e di un multiplo della distanza di questo punto ad una retta fissa è costante.

3° Conducendo da tutti i punti di una retta situata nel piano di una sezione conica le tangenti a questa curva, e congiungendo con una corda i puoti di contatto delle due tangenti che partono dallo stesso punto della retta, tutte le corde si tagliano nello stesso punto che chiamasi il polo della retta. Questo punto è sul diametro che divide in due parti uguali tutte le corde parallele alla retta, e la retta prende il nome di polare di quel punto di concorso per riapetto alla sezione conica data.

Se immaginiamo nell'intorno di un cono retto due sfere tangenti al cono e ad un piano secante, che determina in esso un ellisse o un iperbola; i punti di contatto di queste sfere col piano secante sono i fuochi della curva, i cerchi di contatto del cono e della sfera esistono in piani che tagliano il piano della curva secondo le direttrici.

Nel caso della parabola non si può condurre che una sola sfera che tocchi il cono ed il piano secante, e questa determina il fuoco e la direttrice unica.

La conoscenza delle principali proprietà delle sezioni coniche è dovuta al divino Platone ed alla sua scuola. Questo studio per quasi due mila anni è sembrato un oggetto di pura curiosità, fintanto che l'illustre Kiepero dimostrò che i pianeti descrivono nel loro moto delle ellissi delle quali il sole occupa il fuoco, e poco dopo di lui Newton generalizzò la scoperta, deducendone la legge della attrazione universale.

Questo esempio è adattatissimo per confondere quelli spiriti superficiali, che spregiano quelli studi scientifici i quali non si riferiscono ad applicazioni immediate.

§ 14. *Delle principali superficie curve.*

La sfera, il cono e il cilindro retto secondo la definizione che ne è stata data nel § 9, non sono che casi particolari delle superficie di *rivoluzione*. Queste sono generate dal moto di una linea intorno ad un asse fisso.

Il piano che passa per l'asse dicesi piano meridiano.

Le superficie di rivoluzione possono considerarsi anco come generate dal moto di una circonferenza il cui centro percorre l'asse, intanto che il raggio varia in modo che la sua estremità percorra la linea meridiana, o la generatrice.

Tra le superficie di rivoluzione si debbono distinguere l'ellissoide, l'iperboloide, la paraboloide di rivoluzione generate dal moto di un ellisse, di una iperbola, di una parabola attorno i loro assi.

Le superficie *annulari* generate dalla rivoluzione di una curva piana attorno ad un asse situato nel piano della curva ed esterno ad essa sono comprese nelle superficie di rivoluzione.

Il *toro* generato dalla rivoluzione di un cerchio attorno ad un asse è la più semplice delle superficie di rivoluzione.

Tutte le superficie di rivoluzione possono essere eseguite sul tornio con una sagoma conveniente.

Le superficie *cilindriche* si possono considerare come generate dal movimento di una retta che striscia sopra una direttrice data, mantenendosi sempre parallela ad una data direzione: il cilindro retto e obliquo, è un caso particolare delle superficie cilindriche.

Nel modo stesso il cono retto e il cono obliquo non sono che casi particolari delle *superficie coniche*, le quali possono considerarsi come generate dal movimento di una retta che passa sempre per un punto fisso, mentre percorre una direttrice data.

Le superficie *conoidi* sono generate dal movimento di una retta, la quale appoggiandosi ad una retta fissa percorre una altra curva qualunque, restando però sempre parallela a un piano dato.

In generale tutte le superficie sulle quali può applicarsi una retta in un senso determinato dicousi superficie a generatrice rettilinea.

Queste superficie sono sviluppabili se due elementi rettilinei infinitamente vicini possono considerarsi come nello stesso piano, nel caso contrario diconsi superficie storte.

Le superficie cilindriche e coniche sono sempre sviluppabili; le superficie conoidi in generale sono storte. La superficie generata da una retta che cammina su due direttrici qualunque, restando sempre parallela ad un piano fisso è storta. Come pure è storta la superficie generata da una retta che si muove appoggiandosi su tre direttrici qualunque.

Sarà facile rendersi conto di questo ultimo modo di generazione, immaginando che un punto qualunque di una delle direttrici sia preso per il vertice di una superficie conica, generata da una retta che passa per questo vertice appoggiandosi sulla seconda direttrice; se questa superficie conica incontrerà la terza direttrice in qualche punto, la generatrice che passa per questo punto è una retta che si appoggia sulle tre direttrici.

Questa costruzione si deve immaginare ripetuta per tutti i punti della prima direttrice.

Le ali dei mulini a vento offrono l'esempio di una superficie storta che abbia tre generatrici rettilinee.

Le orecchie dell'aratro sono superficie storte analoghe a quelle delle ali dei mulini a vento.

Le superficie inviluppanti ci offrono il modo di generazione più esteso per le superficie. Se si supponga una superficie qualunque muoversi nello spazio variando di grandezza e di posizione secondo una legge determinata, la superficie che conserverebbe la traccia di tutte queste posizioni successive dicesi, *superficie inviluppante*.

Il *toro* per esempio è l'inviluppante di tutte le posizioni successive che prende una sfera di raggio costante il cui centro si muove sopra una circonferenza.

Il cono retto è l'inviluppante di tutte le posizioni che prende una sfera il cui centro si muove sopra una linea retta, mentre il raggio varia proporzionalmente alla distanza del centro ad un punto fisso di questa retta.

§ 15. *Elementi di geometria descrittiva.*

METODO DELLE PROIEZIONI. Monge ha dato il nome di geometria descrittiva a dei metodi, che se non ha egli creati interamente, ha singolarmente perfezionati, e riuniti in un corpo di dottrina, adattandoli a rappresentare tutte le forme esteriori dei corpi, ed a risolvere sulle figure considerate nello spazio per mezzo di costruzioni eseguite in un solo piano tutti i problemi della geometria.

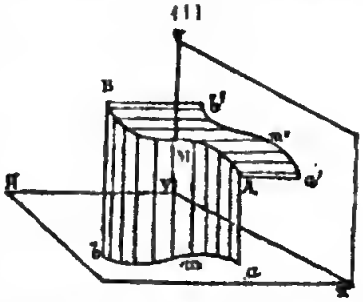
Il metodo delle proiezioni si adopra in geometria descrittiva per rappresentar le linee nello spazio.

Si chiama *proiezione* di un punto sopra un piano il piede della perpendicolare abbassata da questo punto sul piano.

La proiezione di una retta A sopra un piano è una retta che contiene le proiezioni di tutti i punti della retta A. Le linee che proiettano un numero qualunque di punti della retta A restano tutte in un piano che dicesi *piano proiettante*; e la proiezione della retta A rappresenta la intersezione del piano proiettante col piano di proiezione.

In generale la proiezione di una curva qualunque AMB (fig. 111) è una linea *amb*

111



che contiene i piedi di tutte le perpendicolari *Aa*, *Mm*, *Bb* abbassate da tutti punti della curva AMB sul piano di proiezione XII. Queste perpendicolari si trovano tutte sopra una superficie cilindrica nel sen-

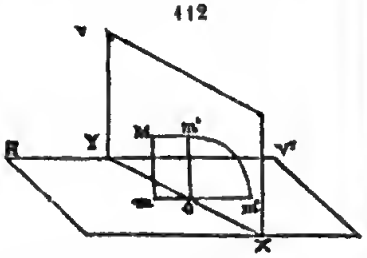
so il più generale della parola, che prende il nome di *cilindro proiettante* della curva AMB.

Se si proietta la curva AMB sopra un secondo piano VX che prenderemo perpendicolare al primo l' insieme delle due proiezioni amb, $a'm'b'$ determina completamente la curva AMP nello spazio.

Infatti questa curva è l' intersezione di due superficie cilindriche rette, che hanno per direttrici le proiezioni amb, $a'm'b'$ e per generatrici delle rette respettivamente perpendicolari ai piani di proiezione.

Per effettuare sopra un solo piano le costruzioni relative alle linee che esistono nello spazio basta immaginare che il piano verticale VX (fig. 112) sia stato ri-

112



condotto da sinistra a destra sul piano orizzontale HX girando intorno alla comune intersezione XY che prende il nome di linea di terra. Allora tutti i punti del piano verticale hanno descritti degli archi di cerchio $m'm''$, le costruzioni grafiche sono venute a distendersi sopra lo stesso foglio di disegno V'XH.

Questa disposizione è però buona solo come mezzo di esecuzione, ed ogni volta che vogliamo renderci conto delle costruzioni geometriche che hanno servito ad una certa operazione, dobbiamo rialzare mentalmente il piano verticale e figurarcelo in una situazione perpendicolare al piano orizzontale.

Le proiezioni m, m' del punto M considerato nello spazio si trovano sul foglio di disegno sopra una stessa perpendicolare alla linea di terra.

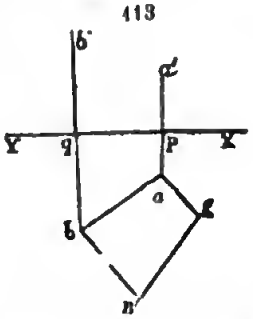
Designandosi coi lettere i punti dello spazio, si designano le loro proiezioni con le stesse lettere diversamente accentuate.

Per rappresentare la superficie sui piani di proiezione bisogna conoscere il loro modo di generazione. In generale si rappresentan le proiezioni delle *direttrici* e quelle della *generatrice*. Così per una superficie conica si prendono le proiezioni della *direttrice*, quelle del *vertice*, e quelle della *generatrice*; pigliando tra tutte le posizioni che questa può occupare, quelle che sembrano più adatte a rappresentare i limiti della superficie conica descritta: lo stesso si fa per una superficie cilindrica.

Per rappresentare una superficie di rivoluzione si prendono le proiezioni dell' *asse*, e quella della *generatrice* o della *curva meridiana*. Potrebbe una di queste curve essere presa come direttrice; la generatrice sarebbe un cerchio, il cui raggio varia col variare della distanza di ciascun punto della direttrice dall' asse, mentre il centro del cerchio percorre l' asse medesimo.

QUESTIONI DIVERSE SULLA LINEA RETTA E SUL PIANO. *Problema I.* Trovare la vera distanza di due punti A e B determinate nello spazio dalle loro proiezioni (a,a'), (b,b') (fig. 113).

113



All' estremità della retta ab che unisce le proiezioni orizzontali dei due punti, si inalzino su questa retta le perpendicolari a aA', bB' respettivamente uguali alle distanze $a'p$, $b'q$ delle proiezioni di a' e b' alla linea di terra, $A'B'$ sarà la distanza dimandata, ossia la vera lunghezza della retta che ha per proiezioni ab ed $a'b'$.

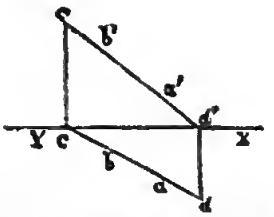
Se una retta è parallela ad uno dei piani di proiezione, la sua proiezione nell' altro piano è parallela alla linea di terra.

Se una retta è situata in uno dei piani di proiezione, si confonde con la sua proiezione in questo piano, e l' altra sua proiezione si confonde coe la linea di terra.

Quando una retta è posta in un piano perpendicolare alla linea di terra, le sue due proiezioni si confondono in una sola retta perpendicolare alla linea di terra, e perchè sia determinata completamente bisogna conoscere la sua proiezione sopra un terzo piano, che in generale si prende perpendicolare agli altri due, o due punti di essa. I punti nei quali una retta incontra i piani di proiezione, prendono il nome di *tracce* della retta.

Problema II. Date (fig. 114) le proie-

114



zioni ab, $a'b'$ di una retta trovare le di lei tracce?

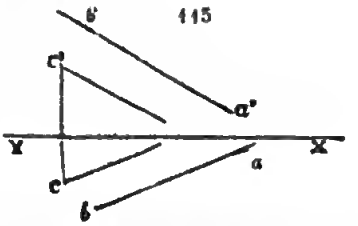
Si prolunghi ab sino all' incontro della linea di terra xy in c, si conduca per c una perpendicolare alla linea di terra, e si prolunghi sino all' incontro di $a'b'$ in c'; sarà c' la traccia della retta sul piano verticale. Il punto d in cui la retta incontra il piano orizzontale si trova nel modo stesso.

Problema III. Date le proiezioni ab, $a'b'$ di una retta, e quelle di un punto c e c', trovare le proiezioni di una retta che passi per il punto dato parallela alla retta data? (fig. 115).

Queste proiezioni passano per c e c' e sono parallele alle proiezioni date.

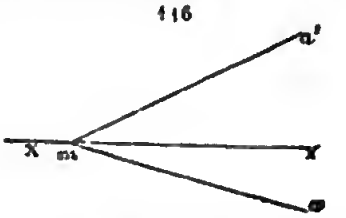
Un piano si rappresenta per le sue tracce, cioè per le sue intersezioni coi piani

115



di proiezione. Evidentemente queste tracce ma, ma' di un piano (fig. 116) si incon-

116



trano in un punto m della linea di terra.

Se un piano è perpendicolare ad uno dei piani di proiezione, la sua traccia sull' altro piano di proiezione è perpendicolare alla linea di terra.

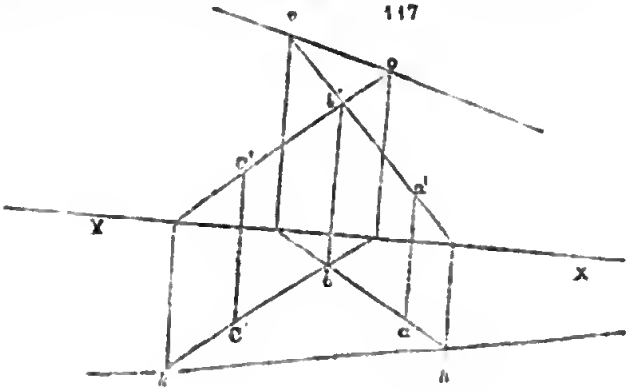
Se un piano è parallelo ad uno dei piani di proiezione, non ha che una sola traccia, che è parallela alla linea di terra ed esiste nell' altro piano di proiezione.

Problema IV. Trovare le tracce di un piano che passa per tre punti dei quali si conoscono le proiezioni (a,a'), (b,b'), (c,c')? (fig. 117).

Si cerchino le tracce delle rette che hanno per proiezioni $(ab, a'b')$ e $(bc, b'c')$; e siano queste rispettivamente la traccia verticale, h traccia orizzontale per l' una, e per l' altra v e k.

Le linee uv ed hk saranno le tracce del

117

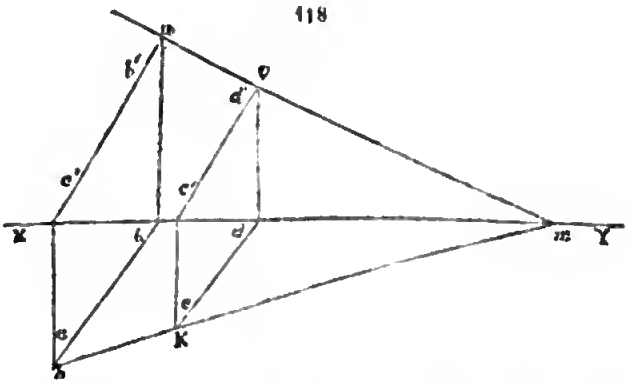


piano cercato, e verranno a concorrere in uno stesso punto della linea di terra. Ciò può servire a verificare l'esattezza della costruzione.

Questa verificazione può farsi anco osservando che le tracce della linea le cui proiezioni sono (ac, $a'c'$) devono trovarsi sulle tracce del piano già determinate. La costruzione stessa servirebbe a determinare le tracce del piano, che passa per due linee che si incontrano; le proiezioni del punto di incontro dovrebbero però trovarsi sulla stessa perpendicolare alla linea di terra.

Problema V. Date le proiezioni di due rette parallele, trovare le tracce del piano che passa per queste due rette? (fig 118) Anco in questo caso le linee del piano pas-

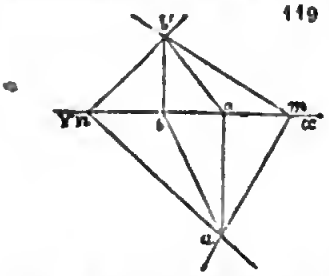
118



sano per le tracce verticali u, v e per le tracce orizzontali h e k delle rette date. Ci potremmo servire della costruzione precedente anco per trovare le tracce di un piano che passa per una retta e per un punto dato; poichè basterebbe condurre per il punto dato una parallela alla retta data, e segnitare come sopra.

Problema VI. Date le tracce a m b' ed a n b' di due piani (fig. 119) trovare le

119

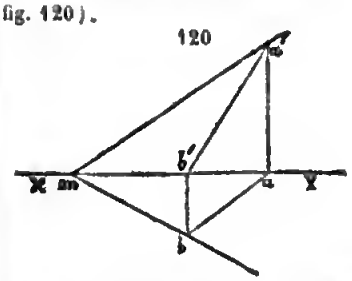


proiezioni della loro intersezione?

Si abbasseranno dai punti a e b' le perpendicolari sulla linea di terra aa' bb', ed ab, $a'b'$ saranno le proiezioni della intersezione cercata.

Problema VII. Data la proiezione orizzontale ab di una retta contenuta in un piano, e le tracce del piano bma', trovare la proiezione verticale della retta? (fig. 120).

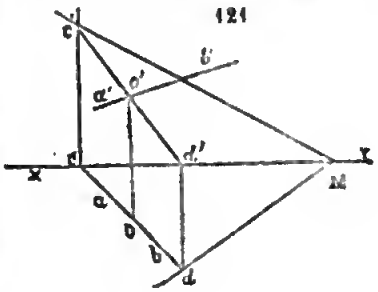
120



Questa proiezione si determina conducendo bb', aa' perpendicolari alla linea di terra o congiungendo $b'a'$.

Problema VIII. Date le proiezioni ab $a'b'$ di una retta, e le tracce di un piano d Mc' (fig. 121) trovare le proiezioni o

121

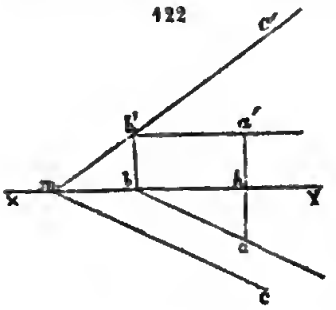


ed o' del punto in cui la retta taglia il piano?

Prolungando *ab* fino all'incontro della traccia M*d* e della linea di terra, nei punti *d* e *c*, si conducano per questi punti due perpendicolari alla linea di terra e si congiunga *d'c'*, questa rappresenta la proiezione verticale dell'intersezione del piano *dMc'* col piano proiettante la retta (*ab*, *a'b'*) e il punto *o'* dove incontra *a'b'* rappresenta la proiezione verticale dell'incontro di questa retta col piano, la proiezione orizzontale o si trova abbassando da *o'* una perpendicolare alla linea di terra, e prolungandola fino all'incontro di *nb* in *o*.

Se la retta data (fig. 122) fosse verti-

122



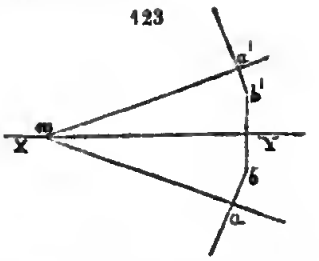
cale, la sua proiezione orizzontale sarebbe un punto *a*, situato sul prolungamento della sua proiezione verticale n' h perpendicolare alla linea di terra. Bisognerebbe allora condurre per la retta data un piano *abb'* la cui traccia orizzontale *ab* fosse parallela ad *mc*; questo piano incontrerebbe il piano dato secondo una linea (*ab*, *o'b'*) parallela al piano orizzontale, ed *a'* sarebbe il punto di incontro della retta data col piano *amc'*

Questa ultima costruzione può servire a trovare la proiezione verticale di un punto appartenente ad un piano del quale si conoscono le tracce, quando di questo punto è data la proiezione orizzontale.

Problema IX. Date le proiezioni *b*,*cb'* (fig. 123) di un punto condurre per questo punto una perpendicolare al piano *ama'* di cui sono date le tracce.

Le proiezioni *ba* e *b'a'* della perpendicolare cercata sono perpendicolari alle tracce del piano, si possono cercare le proiezioni del punto in cui la perpendicolare incontra il piano dato servendosi

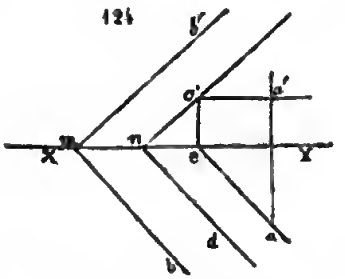
123



del problema VIII, quindi la distanza del punto dato al piano servendosi del problema I.

Problema X. Date le proiezioni (n, n') (fig. 124) di un punto condurre per esso

124



un piano *dnc'* parallelo ad un piano del quale si conoscono le tracce *bmb'*?

Le tracce *nd*, *nc'* del piano cercato, sono parallele alle tracce del piano dato, ed il punto *c'* di una di queste tracce si determina, conducendo per n e per *a'* le proiezioni *ca*, *c'a'* di una retta parallela ad *mb*, che incontra il piano verticale in *c'* ed esiste nel piano cercato.

Problema XI. Trovare le tracce di un piano, che passa per una retta data per le sue proiezioni e parallelo ad un altra retta data?

Per un punto della prima si conduce una parallela all'altra, problema III, e si avranno così due rette che si incontrano in un punto, e determinano un piano (problema IV) che è il piano cercato.

Problema XII. Date le proiezioni di un punto, condurre per questo un piano perpendicolare ad una retta data?

Le tracce del piano sono perpendicolari alle proiezioni della retta, per cui basta condurre per un punto dato un piano parallelo ad un piano dato (problema X).

Problema XIII. Data le proiezioni di una retta, condurre per questo un piano

perpendicolare ad on piano di cui si conosconn lo tracce?

Da un punto qualunqno prose sulla retta si abbassi una perpendicolare sul piano dato (problema IX), e per questa o per la rotta data si faccia passare un piano (problema IV), che sarà il piano cercato.

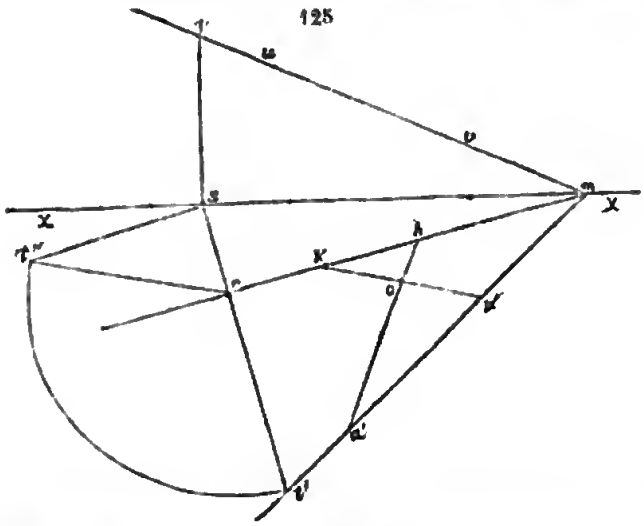
Problema XIV. Dato le proiezioni di un punto, condurre per quosto un piano perpendicolare a duc piani dati per le ioro tracce?

Si cerchi l' ioteraczione doi duo piani dati, e per il punto si conduca un piano perpendicolare a questa retta (problems XII).

Problema XV. Date lo proiezioni di due rette che si tagliano, determinare l'angolo che fanno queste rette?

Si determinino le tracco delle retto date (problema II), e sieno (fig. 125) *u*, *v* sul piano vorticalo *h*, *k* sul piano orizzontale, saranno *uv* ed *kh* le tracco del pia-

125



no che contiene queste rette, le quali dovranno incontrarsi in on punto *m* sulla linea di terra: si conduca per on pnnto qoalunquo *s* una perpendicolaro *st* alla linea di terra XY, ed una perpendicolare *sr* alla *kh*; per lo stesso punto *s* si conduca *st''* perpendicolaro ad *sr* od uguale ad *st*, e si congiunga *rt''*; avremo il triangolo *rst''* riportato sul piano orizzontale uguale al triangolo *rst* nello spazio. Ora prolnngando *sr* fioo all' incontro in *t'* del cerchio descritto con raggio *rt''* e centro *r*, o congiongendo *m t'*, si avrà *rmt* riportato sul piano orizzontale nguale al triangolo *rmt* dello spazio o *t' m* = *tm*. sopra a *t' m* si prenda *t' u'* = *tu*, *t' v'* = *tv* od avremo riportato sul piano *u' h*, *v' k* che rappresentan lo rette dato *uh* *vk*. In conseguenza l' angolo *koh* sarà quello cercato.

Problema XVI. Dato le tracco di due piani determinare l'angolo diedro di questi piani?

Si cerchi l' intersezione del due piani dati (problema VII), per nn punto qnalunqne di questa intersezione si conducano due rette perpendicolari si piani (problema IX); l'angolo che fanno queste retta è il supplemento dell'angolo dei piani, e il problema è ricondotto a quello precedente.

PROBLEMI SUGLI ANGOLI TRIEDRI. Dello sei quantità (angoli diedri, ed angoli piani) cho costituiscono un angolo un angolo triedro, quando se ne conoscono tre, si possono dedurre le altre tre per mezzo di una costruzione piana.

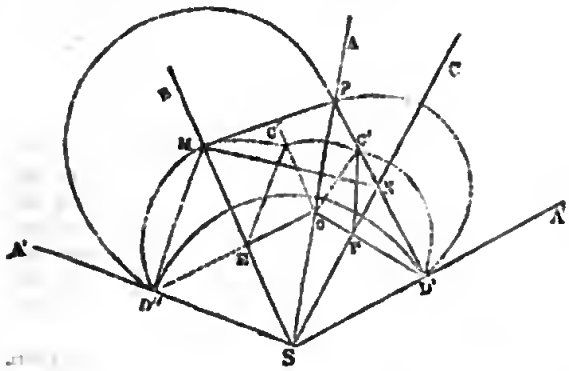
Primieramento abbasaando da un punto preso dentro l' angolo triedro le perpendicolari sullo tro faccie, si forma un nuovo angolo triedro che dicesi supplementaro del primo. I due triedri hanno queste proprietà, cho l' angolo diedro di ciascuno è uguale al supplemento dell' angolo piano corrispondento nell'altro: considerando dunque il triedro snpplemen-

tare, si possono ridurre a tre problemi distinti i sei che si presentano, quando conosciuti tre elementi di un triedro, si tratta di trovare gli altri tre con una costruzione piana.

4° Date le tre faccie piane A′SC, CSB, BSA″ (figura 126) che compongono l'angolo solido, e se si suppongono distese sullo stesso piano, trovare i valori dei tre angoli diedri?

Si prenda SD′ = SD″ per i punti D′ e D″ si abbassino respettivamente sulle rette SC, SB le perpendicolari D′D, D″D che si tagliano in D, si costruiscano i trian-

126



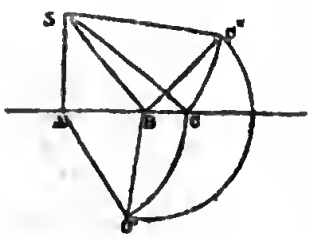
goli rettangoli DFG′, DEG″ che abbiamo per lati DF, DE e con le ipotenuse FG′ = FD′ ed EG″ = ED″, gli angoli DFG′, DEG″ saranno la misura degli angoli diedri formati sulli spigoli SC, SB.

Per avere il terzo angolo diedro formato sullo spigolo riportato in SA′ ed SA″, si innalzeranno sopra SA′ ed SA″ le perpendicolari D′N, D″M, si condurrà MN e si compirà il triangolo MPN nel quale MP = MD″ e NP = ND′; sarà l'angolo MPN la misura dell'angolo diedro cercato.

Se le costruzioni sono eseguite con cura, il punto P cadrà sulla linea SA, ed MN sarà perpendicolare a questa linea.

Questo problema comprende come caso particolare *la riduzione di un angolo all'orizzonte*, che occorre spesso nel formare le carte, e le piante topografi-

127



che. Così se si osservano (fig. 127) gli angoli ASC = β ed ASB = γ che fanno con la verticale due raggi visuali inclinati all'orizzonte, e l'angolo α che questi fanno tra loro, e si cerca la proiezione orizzontale di quest'angolo α; si tratterà evidentemente di costruire l'angolo diedro formato dai piani verticali che contengono i raggi visuali.

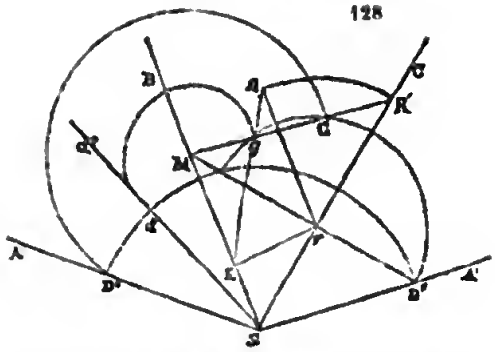
Se facciasi CSC″ = α, si ponga a SC″ = SC, e dai punti A e B come centri si descrivano con raggi AC e BC″ due archi di cerchio, questi si incontreranno in C′ e daranno l'angolo CAC′ cercato.

2° Date le faccie A′SC, CSB e l'angolo compreso, trovare le altre parti dell'angolo triedro (fig. 126)?

Con un raggio arbitrario SD′ si descriva dal centro S un arco di cerchio indefinito, e si conduca FD′ perpendicolare sopra SC, quindi prendendo l'angolo DFG′ eguale all'angolo diedro dato, ed FG′ = FD′, si conduca da G′ una perpendicolare sopra FD′ che l'incontri in D; da D si abbassi la perpendicolare sopra SB, e si prolunghi fino all'incontro del cerchio D′D″ in D″, conducendo SD″ avremo determinato la faccia BSA″.

Le costruzioni rimanenti per trovare gli altri due angoli diedri si termineranno come nel caso precedente.

128



3° Date due faccie ASC, CSB (fig. 128) di un angolo solido e l' angolo diedro opposto ad una di esse, trovare le altre parti?

Da un punto D' preso arbitrariamente sopra SA' si conduca D' F perpendicolare sopra SC, e da F si conducano FC ed FR l' una perpendicolare l' altra parallela ad SB; sopra EF si faccia l' angolo FER uguale all' angolo diedro dato. Si prenda FR' = FR e condotta MR' si descriva un arco col centro in F e raggio FD' il quale incontra MR' in due punti G, e g.

Ciò fatto per riportare la terza faccia sul piano delle altre due non resterà che a far centro in M, e con raggio MG o Mg descrivere un arco di cerchio che incontrerà il cerchio che ha per raggio SD in D'' o d'', e darà la faccia BSA'' o BSa'', che tutte e due sodisfanno al quesito.

PIANI TANGENTI ALLE SUPERFICIE. Un piano è tangente ad una superficie in un punto dato, quando contiene tutte le tangenti alla superficie che passano per il punto dato.

Per determinare questo piano basta condurre per il punto dato due tangenti a due curve che passano per quel punto sulle superficie date.

Proiettando sopra un piano una curva e la sua tangente, le proiezioni di queste due linee sono l' una tangente all' altra.

Il contorno apparente di una superficie proiettata sopra un piano, si ottiene cercando i punti di contatto di tutti i piani tangenti alla superficie, che sono perpendicolari al piano di proiezione.

Nelle superficie cilindriche, essendo queste generate da una retta che si muove parallelamente ad una retta data, appoggiandosi sopra una direttrice data, il piano tangente contiene la generatrice e la tangente alla direttrice nel punto in cui questa è incontrata dalla generatrice.

Nelle superficie coniche il piano tangente contiene la generatrice, che passa sempre per il vertice del cono, e la tangente alla direttrice nel punto di incontro con la generatrice.

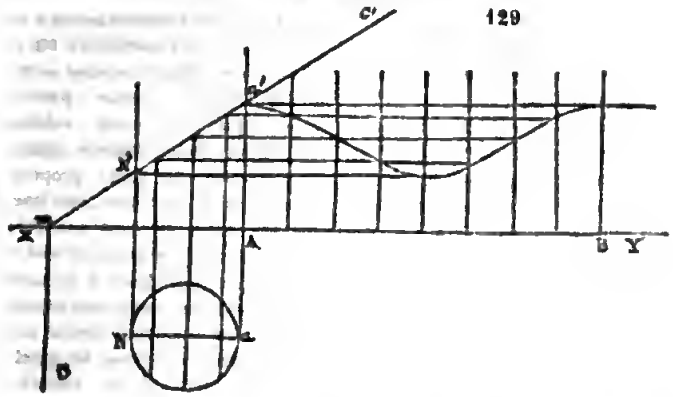
Nelle superficie di rivoluzione contiene le tangente alla curva meridiana, e quella al parallelo che passano per il punto di contatto.

INTERSEZIONI DELLE SUPERFICIE. Tagliando una superficie, della quale si conosca il modo di generazione, con un piano orizzontale, e costruendo la proiezione orizzontale e verticale di un certo numero di posizioni della generatrice, queste generatrici saranno incontrate dal piano. I punti di incontro si proietteranno nel piano verticale sulla traccia del piano, che sarà una parallela alla linea di terra, e all' incontro di questa con le proiezioni verticali dalla generatrice; le proiezioni orizzontali di questi punti di incontro daranno la proiezione orizzontale dell' intersezione del piano e della superficie.

L' intersezione di una superficie cilindrica con un piano orizzontale, da sempre una sezione uguale alla base del cilindro: nelle superficie coniche questa sezione è simile alla base del cono.

Nelle figure 129, 130 i piani $d'mC$ e $b'mb$ secanti il cilindro ed il cono sono perpendicolari al piano verticale senza essere orizzontali. La sezione del cilindro ha per proiezione orizzontale un circolo, e per proiezione verticale una retta. Facendo girare il piano secante intorno alla sua traccia orizzontale Cm, e riportandolo sul

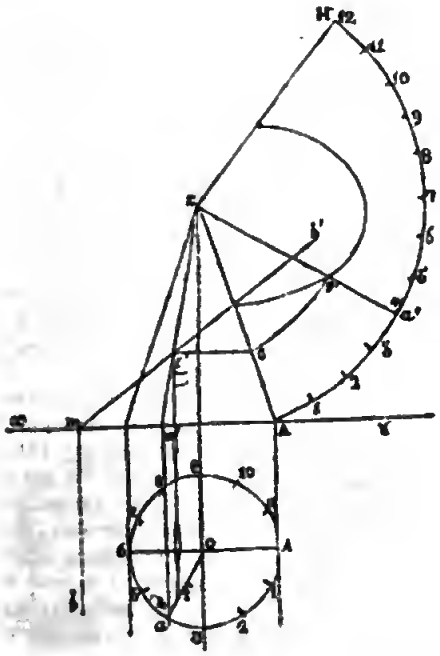
129



piano orizzontale, si troverebbe che questa sezione è un ellisse il cui diametro maggiore è N' a' e il minore il diametro del circolo.

Per costruire la intersezione del cono (fig. 130) col piano secante, basta osservare che *f'* ed *f* rappresentano le proiezioni verticale od orizzontale dell' incon-

130



tro di una generatrice del cono col piano secante, e fare per un certo numero di generatrici la stessa costruzione fatta per la generatrice che ha per proiezioni E*a'* ed O*a*. Facendo ruotare il piano secante attorno ad *m b* si avrà la sezione abbattuta sul piano orizzontale.

In generale la intersezione di due superfici qualunque si ottiene, segando ciascuna di queste superficie con una terza per la quale sia facile costruire le curve di intersezione con ciascuna delle date; prendendo i punti comuni a queste due curve che sono i punti di incontro delle

due superficie ; ripetendo la medesima operazione fintanto che si abbia un sufficiente numero di punti della intersezione delle due superficie date .

Si hanno spesso due intersezioni una delle quali si prende il nome di curva di *ingresso* l' altra di curva di *uscita* .

Se una delle superficie è sviluppabile si deve sviluppare la superficie , e costruire la trasformata della intersezione .

La figura 129 rappresenta lo sviluppo della curva che si ottiene tagliando un cilindro retto a base circolare con un piano inclinato alla base . La retta AB ha per lunghezza la circonferenza della base del cilindro ; è divisa in un numero di parti uguali , corrispondenti alle parti in cui è divisa questa circonferenza , sui punti di divisione sono inalzate le generatrici , e su ciascuna di queste è stata presa una lunghezza uguale a ciascuna porzione della generatrice corrispondente compresa tra la base del cilindro e la sezione .

La figura 130 rappresenta lo sviluppo della curva che si ottiene tagliando un cono retto a base circolare con un piano ; E a'' rappresenta sullo sviluppo la generatrice di cui le proiezioni sono Ea', Oa ed EF' la distanza dal vertice del cono da un punto le cui proiezioni sono f ed f'. Con la medesima costruzione si ottengono tutti gli altri punti dello sviluppo.

PRINCIPII DI PROSPETTIVA . La prospettiva lineare ha per oggetto di rappresentare sopra un piano i contorni apparenti degli oggetti .

Per arrivare a questo scopo si imagina che i raggi luminosi che partono da tutti i punti di questi contorni , si dirigano in linea retta verso l' occhio , e siano tagliati da un piano che dicesi *quadro* , le tracce di queste linee sono le prospettive dei punti corrispondenti degli oggetti .

Conoscendo le proiezioni orizzontale e verticale di un raggio visuale , si può coi metodi della geometria descrittiva trovare il punto in cui questo raggio incontra il quadro Per cui questo ramo di geometria contiene implicitamente la teoria e la pratica della prospettiva lineare .

In generale si suppone il piano del quadro verticale , e sul piano orizzontale si segnano le proiezioni delle figure , delle quali si intende conosciuta la altezza o piuttosto la proiezione verticale .

Il piede della perpendicolare abbassata dall' occhio dello spettatore sul piano del quadro , cioè la *proiezione verticale* del punto di vista , chiamasi *punto principale* o *punto di vista* ; sebbene questa ultima denominazione generalmente adottata non sia molto propria . Chiamasi *linea di orizzonte* , una linea parallela alla linea di terra condotta per il punto principale , e *punti di distanza* due punti situati sulla linea d' orizzonte a sinistra e a destra del punto principale , ad una distanza da questo uguale alla distanza dell' occhio dal piano del quadro .

La prospettiva di una retta è sempre una linea retta .

La prospettiva di una linea parallela al quadro e parallela alla linea stessa . Le linee parallele tra loro , ma non parallele al quadro , hanno per prospettiva delle rette che concorrono in un punto del quadro , e questo punto si chiama *punto di fuga* o *punto di concorso* di quelle rette ; si ottiene conducendo per l' occhio una parallela a queste rette , e prolungandola sino all' incontro col piano del quadro .

Ogni retta che passa per il piede dello spettatore , o in altri termini la proiezione orizzontale dell' occhio di lui è verticale in prospettiva .

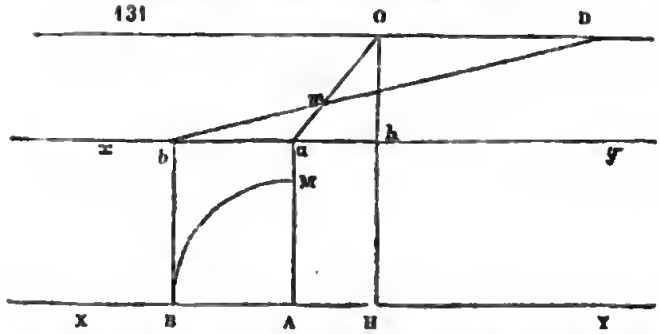
Se una retta è perpendicolare al piano del quadro la sua prospettiva passa per il punto principale .

Se una orizzontale fa un angolo di quarantacinque gradi col piano del quadro la sua prospettiva passa per uno dei punti di distanza .

Si voglia mettere in prospettiva un punto M situato sul piano orizzontale di proiezione (fig. 131) . Osserveremo che se il piano del quadro fosse ricondotto sul piano orizzontale girando intorno alla linea di terra xy , essendo gli oggetti dei quali cerchiamo la prospettiva al di là del quadro , il disegno della prospettiva cadrebbe sullo stesso piano delle proiezioni orizzontali . Per evitare questo inconveniente , si suppone la linea di terra trasportata in addietro parallelamente a se stessa in xy e poi ribbattuto il piano .

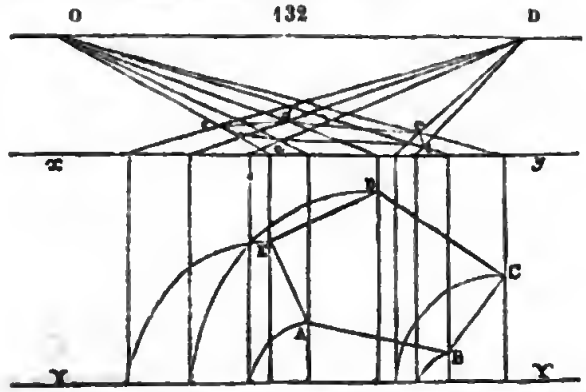
Dopo di che la prospettiva del punto M si troverà alla intersezione della retta Oa che passa per il punto principale , e della retta bD che passa per il punto di distanza .

131



La prospettiva *a b c d e* (fig. 132) del poligono ABCDE situato sul primo orizzontale, si determina prendendo la prospettiva di ciascuno dei vertici del poligono, operando nel modo stesso che per il punto M.

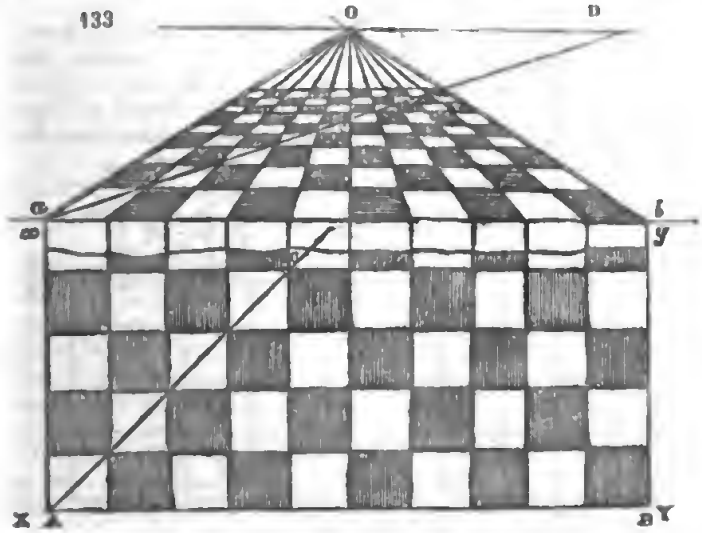
132



Per trovarne la prospettiva di un cerchio posto nel piano orizzontale di proiezione, bisogna determinare la prospettiva dei vertici di un poligono regolare circoscritto a questo cerchio, e quindi circonscrivere a questo una curva che sarà un ellisse.

La figura 133 mostra come si può met-

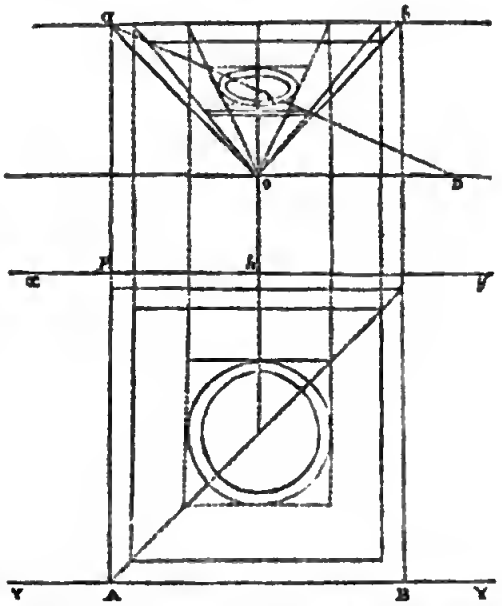
133



tere in prospettiva una schacchiera composta di quadrati.

Se si trattasse di mettere in prospettiva una figura situata in un piano orizzontale *ab* (fig. 134), che si trova ad una data altezza al disopra del piano orizzontale di proiezione, si adeprerebbe la traccia *ab* di queste piano, nel modo stesso che

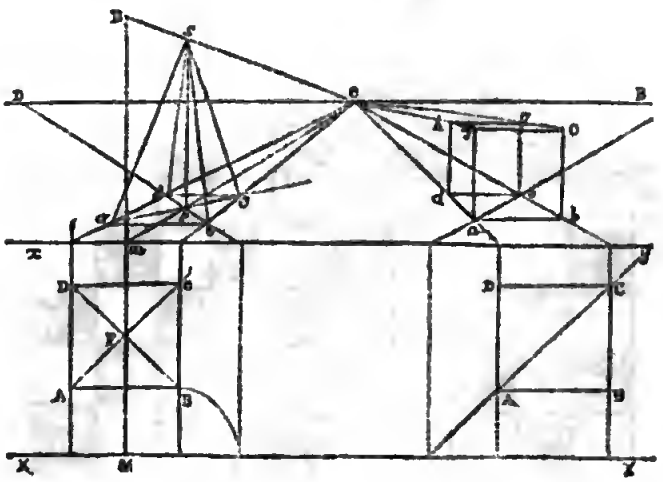
134



si adopra la linea di terra, e per questo si ripeterebbero le costruzioni accennate di sopra per rispetto alla linea di terra. Ne offre un esempio la figura 134, la quale mostra la prospettiva di un palco, di cui è data la proiezione orizzontale e l'altezza *ap*.

La figura 135 da la prospettiva di una piramide a base quadrata, che ha per altezza *m S*; e la prospettiva di un cubo.

135



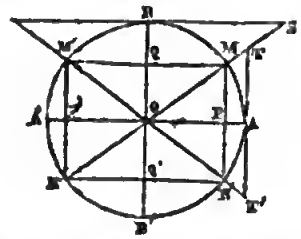
§ 15. *Trigonometria rettilinea e sferica.*

PRINCIPII FONDAMENTALI. La trigonometria ha per oggetto di risolvere i triangoli rettilinei e sferici, di trovare cioè per mezzo del calcolo i loro angoli e i loro lati, dipendentemente da un numero di dati sufficiente.

Per questo si stabiliscono delle relazioni, non fra i lati dei triangoli e gli angoli, ma tra i lati e certe linee dipendenti dagli angoli, o dagli archi intercetti tra i lati di questi angoli, che si considerano avere il loro vertice al centro di una circonferenza di raggio dato.

Queste linee sono: *il seno*, ossia la perpendicolare MP (fig. 136) abbassata

136



dalla estremità M dell'arco MA sul diametro che passa per l'altra estremità.

La tangente AT.

La secante OT.

Si adoprano anco il seno MQ, la tangente BS, e la secante OS dell'arco MB che *è il complemento* dell'arco AM; talo cioè che la somma degli archi AM + MB = 90.° Queste linee prendono il nome di *coseno*, *cotangente*, *cosecante*.

Chiamando x l'arco AM le linee trigonometriche che abbiamo rammentato si designano con le abbreviature.

$$MP = \text{sin. } x,\quad AT = \text{tang. } x,\quad QT = \text{sec. } x$$
$$MQ = \cos. x,\quad BS = \text{cot. } x,\quad OS = \text{cos. } x$$

AP e BQ prendono il nome di *senoverso* e *cosenoverso* ma queste ultime linee sono di pochissimo uso.

Considerando come positivi i valori delle linee trigonomotriche che corrispondono ad angoli minori di 90°, al crescere dell'angolo alcune di queste cangiano di segno. Così per l'angolo AOM' il coseno OP' essendo preso in una direzione diametralmente opposta al coseno OP, dovrà essere affetto dal segno — ed essere riguardato come negativo.

Spesso accade nella geometria superiore di dovere considerare degli angoli maggiori di 180°. Per cui dobbiamo determinare *i valori correlativi* delle diverse linee trigonometriche per angoli di qualunque grandezza.

Per procedere con ordine si supporrà che l'angolo cresca da 0 a 90° poi da 90° a 180°, da 180° a 270° e finalmente da 270° a 360.°

Oltrepassato questo limite le linee trigonometriche riprendono li stessi valori e non è necessario spiegare le ricerche più oltre.

Chiamando r il raggio ed k un numero intero qualunque, si ha

$$\begin{aligned}
\text{sen. } 2k\ 90^\circ &= 0,\\
\text{sen. } (4k+1)\ 90^\circ &= r,\\
\text{sen. } (4k-1)\ 90^\circ &= -r,\\
\text{cos. } (2k+1)\ 90^\circ &= 0\\
\text{cos. } 4k\ 90^\circ &= r\\
\text{cos. } (4k+2)\ 90^\circ &= -r
\end{aligned}$$

Dato un angolo qualunque, per trovare le linee trigonometriche corrispondenti a quest'angolo, cominceremo a sottrarre da esso 360° quante volte si può, e facendo uso delle formule,

$$\begin{aligned}
\text{sen. } (360^\circ k + x) &= \text{sen. } x,\\
\text{cos. } (360^\circ k + x) &= \text{cos. } x,
\end{aligned}$$

se l'angolo residuo x è minore di 90, le linee trigonometriche corrispondenti a questo apparterranno ancora all'angolo dato $360^\circ k + x$.

Se il resto x fosse compreso tra 90° e 180° si sottrarrebbe 90° da x o si avrebbe un resto z o valendosi delle formule:

$$\begin{aligned}
&\text{sen. } (90^\circ + z)\\
= \quad &\text{sen. } (90^\circ - z) = \quad \text{cos. } z\\
&\text{cos. } (90^\circ + z)\\
= -&\text{cos. } (90^\circ - z) = -\text{ sen. } z
\end{aligned}$$

si avrebbero per mezzo delle linee trigonometriche corrispondenti a z, quelle corrispondenti a $90^\circ + z = x$ o quindi le linee corrispondenti all'angolo dato.

Si potrebbe anco sottrarre x da 180°, si avrebbe un resto z' e $x = 180^\circ - z'$, e fare uso delle formule:

$$\begin{aligned}
\text{sen. } (180^\circ - z') &= \quad \text{sen. } z'\\
\text{cos. } (180^\circ - z') &= -\text{ cos } z'
\end{aligned}$$

TAVOLA DEI LOGARITMI DEI NUMERI

NUM.	00	05	10	15	20	25	30	35	40	45
10	00000	00217	00432	00647	00860	01072	01284	01494	01703	01912
11	04139	04346	04532	04737	04922	05125	05308	05511	05693	05891
12	07918	08093	08278	08466	08622	08814	08991	09127	09342	09517
13	11394	11561	11727	11922	12057	12222	12385	12548	12715	12872
14	14613	14758	14921	15078	15222	15381	15534	15680	15832	15987
15	17609	17734	17898	18041	18184	18307	18463	18611	18761	18922
16	20410	20548	20683	20817	20922	21095	21210	21352	21434	21617
17	23045	23172	23300	23425	23563	23672	23803	23929	24056	24180
18	25527	25648	25768	25888	26007	26122	26245	26364	26482	26600
19	27875	27982	28100	28217	28323	28443	28555	28668	28782	28892
20	30128	30211	30320	30405	30532	30645	30750	30862	30963	31063
21	32222	32323	32420	32501	32604	32732	31820	32940	33041	33143
22	34242	34341	34430	34557	34622	34755	34850	34925	35210	35312
23	36170	36267	36361	36463	36543	36652	36755	36822	36922	37016
24	38021	38113	38202	38302	38382	38471	38021	38652	38732	38820
25	39794	39881	39967	40054	40140	40225	40312	40396	40482	40569
26	41497	41381	41664	41747	41830	41913	41999	42079	42160	42245
27	43136	43217	43297	43377	43457	43537	43615	43696	43775	43854
28	44716	44795	44871	44958	45025	45102	45178	45250	45332	45409
29	46240	46315	46382	46454	46530	46613	46687	46761	46833	46909
30	47712	47784	47857	47928	48031	48072	48144	48212	48287	48330
31	48130	48100	48276	48340	48413	48435	48504	48024	48093	48762
32	50515	50583	50251	50713	50780	50852	50920	00987	51050	51121
33	51851	51917	51985	52050	52114	52172	52244	52315	52375	52440
34	53148	53210	53272	53333	53393	53453	53522	53582	53652	53710
35	54407	54469	54531	54592	54654	54712	54777	54839	54900	54961
36	55630	00691	00751	55811	55871	55931	50021	50050	50110	50170
37	50829	56870	56027	56002	57004	57113	07171	57232	07207	57345
38	57978	50033	50002	50152	50208	50223	00280	58377	50403	00450
39	59130	59182	59210	59273	59322	00384	52422	59484	00503	59503
40	60206	60260	00314	60360	00423	60477	00051	00504	00030	00002
41	61278	61331	61304	61407	61403	61512	01505	01458	61703	61732
42	62325	02377	02420	01400	02501	62505	02654	02005	62757	62700
43	63347	00397	63449	63500	63550	63503	03050	03000	63743	03790
44	04350	04305	64444	64403	04542	64591	64040	64000	64750	64737
45	65321	05303	05410	65400	65514	03502	65510	65050	05705	01730
46	66276	06333	66370	66417	66404	66511	66558	04005	66652	66690
47	07210	07260	07303	07350	07204	07440	07400	07032	07075	07004
48	00134	00102	00010	00200	00203	00330	00373	00410	00405	00333
49	00035	00004	00100	00153	00107	00241	00203	00322	00370	00417
NUM.	50	54	10	13	15	23	30	33	43	43

DI 5 IN 5 UNITÀ DA 1 A 10000.

NUM.	65	66	66	63	75	76	66	63	66	63
10	66113	62325	62221	62736	62626	63141	63342	66943	63745	66941
11	66070	65226	66446	65636	65816	67064	67188	67372	67953	67737
12	66531	66864	16547	16256	16336	16331	16721	15865	11056	11227
13	12636	16264	13334	16318	13672	13666	13566	14146	14351	14467
14	16137	16226	16436	16364	16732	16876	17026	17172	17316	17461
15	16636	16176	16312	16461	16565	13726	16866	26556	26145	20276
16	26746	21886	22011	22141	22272	21461	22531	22665	22786	22917
17	24334	24425	24651	24674	24767	21626	23642	26164	22283	23406
18	25717	25864	26661	27066	27184	27366	27416	27931	27846	27761
19	26658	26115	26226	26335	26447	26557	26667	26776	26883	25994
20	61176	31281	61667	31462	31667	31752	61966	31911	31613	62118
21	63244	63343	33446	33546	33646	33746	33845	33943	34044	34143
22	33228	33616	33411	36257	33655	35536	35763	35886	35984	36076
23	37107	37266	37261	37666	37475	37556	37638	37746	37845	37931
24	38527	38556	69534	36163	36276	36336	36446	36536	69525	36757
25	40664	40736	42614	40856	40953	41076	41162	41245	41330	41411
26	42525	42465	42486	42576	42531	42732	42816	41864	42073	44065
27	43635	44012	44661	44176	44246	44326	44404	44483	44566	44666
28	45464	43361	46657	46712	43788	42864	43965	45015	46065	46163
29	46966	47066	47226	47262	47276	47646	47422	27464	47367	47646
30	48460	48361	48372	48546	48714	48766	48865	48626	48656	48066
31	49031	49055	19505	36037	39150	39174	39243	39311	39375	39447
32	31169	31266	31322	31368	31436	31522	31667	31664	31720	31786
33	32664	32556	32564	32566	31756	32827	32862	32956	34026	34084
34	34763	35046	33665	34576	34653	34653	34168	31226	34282	34343
35	35526	35564	36146	35256	36267	36328	36360	36445	33366	33375
36	36226	36266	36348	36462	36467	36526	36644	36743	36744	36751
37	37466	37461	37316	37376	37534	37532	37745	37837	37864	37861
38	38346	38552	38666	38716	38771	38827	38863	38936	38955	38951
39	39656	39716	39776	39824	39876	39934	39966	39946	39967	39152
40	40745	40766	40833	40866	40936	41013	41065	41116	41172	41223
41	41866	41667	41556	41562	42011	42066	42116	42175	42221	42276
42	42325	42560	42541	42566	43043	43064	43144	43155	43245	43256
43	43846	43925	43943	44035	44048	44066	44147	44167	44245	44256
44	44326	44865	44936	44963	45021	45076	45126	45176	45223	45273
45	45801	45846	45856	46044	46062	46036	46067	46134	46161	46226
46	46746	46762	46825	46886	46902	46972	47025	47071	47117	47164
47	47665	47726	47761	47856	47932	47867	47946	47988	48034	48076
48	48374	48615	48654	48756	48723	48767	48842	48885	48931	48976
49	49461	49554	49548	49556	49626	49676	49723	49767	49815	49854
NUM.	65	56	66	66	75	76	65	56	65	65

TAVOLA DEI LOGARITMI DEI NUMERI

NUM.	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
50	69897	69949	69984	70037	70070	70114	70157	70200	70243	70286
51	70797	70809	70944	70889	70997	70939	71013	71054	71099	71139
52	71600	71649	71654	71703	71747	71809	71850	71892	71935	71975
53	72429	72496	72509	72550	72591	72629	72670	72719	72754	72795
54	73239	73280	73320	73360	73400	73440	73480	73520	73560	73600
55	74000	74079	74118	74159	74194	74235	74275	74313	74351	74399
56	74819	74859	74895	74955	74974	75015	75051	75089	75129	75166
57	75547	75629	75604	75705	75740	75779	75813	75853	75891	75929
58	75965	76359	76419	76455	76499	76536	76597	76604	76641	76679
59	77089	74129	77159	74199	77202	77269	77295	77348	77379	77419
60	77815	77851	77897	77934	77969	77999	78032	78069	78104	78140
61	78535	78569	78604	78649	78679	78711	78746	78781	78817	78859
62	79239	78274	78309	78344	78379	78414	78448	78484	78519	78555
63	79934	79969	80005	80037	80072	80106	80140	80175	80202	80240
64	80618	80651	80687	80720	80754	80787	80821	80854	80889	80921
65	81291	81325	81359	81391	81425	81459	81491	81525	81559	81594
66	81954	81987	82026	82055	82089	82116	82151	82184	82217	82249
67	82607	82646	82678	82709	82737	82799	82795	82834	82899	82899
68	82891	82923	82959	82987	83070	83049	83442	83474	83109	83337
69	83885	83919	83949	84979	84011	84041	84073	84105	84136	84167
70	84510	84541	84573	84603	84634	84663	84690	84720	84797	84789
71	85129	85159	85187	85217	85249	85278	85309	85339	85370	85466
72	85739	85769	85794	85824	85954	85884	85914	85944	85974	86004
73	86299	86329	86359	86391	86421	86451	86510	86549	86579	86609
74	86923	86953	86983	87011	87040	87070	87099	87129	87157	87189
75	87490	87519	87549	87579	87609	87638	87667	87699	87727	87756
76	88091	88119	88149	88197	88199	88228	88258	88287	88315	88345
77	88649	88674	88703	88734	88762	88799	88819	88849	88874	88903
78	88960	88987	89015	89045	89073	89101	89146	89179	89204	89232
79	89763	89790	89819	89845	89879	89909	89937	89965	89991	90020
80	90309	90339	90363	90390	90417	90445	90472	90496	90529	90553
81	90849	90875	90902	90929	90999	90985	91069	91099	91092	91059
82	91451	91499	91434	91461	91487	91514	91549	91599	91599	91649
83	91908	91934	91990	91999	99019	99049	99052	99091	92174	92149
84	92428	92454	92480	92505	94931	99957	92993	99009	92034	92999
85	92942	92997	93992	93019	93044	93999	93995	93139	93149	99171
86	93450	99479	93500	99929	94994	89979	93991	99929	93691	93676
87	99938	99977	94001	94097	94954	94071	94191	94199	94151	94179
88	94469	94479	94499	94959	94947	94971	94599	94991	94645	94679
89	94999	94949	94999	99019	94999	95991	95992	95199	95154	99199
90	99544	99579	99479	99497	99521	99545	99569	99590	99917	99941
91	99904	99919	99999	99979	95999	99955	99997	99971	96995	99115
92	96379	96499	96426	99455	96479	96497	99599	96544	66597	96591
93	99948	99979	66992	96915	85945	96995	99999	97911	67995	67999
94	97918	97559	97599	67999	97699	97649	97691	97674	97697	97599
95	97772	97795	97919	97941	67994	97999	97999	97954	97995	97979
96	99997	99259	99272	99295	99519	99549	99599	99995	98499	98496
97	98674	99799	99799	98749	99767	98799	99811	99894	98959	99979
98	99199	99149	99167	99199	99911	99955	99259	99277	99299	99999
99	99564	99583	99997	99629	99691	99979	99995	99717	99739	99769
NUM.	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09

DI 5 IN 5 UNITÀ DA 1 A 10000.

NUM.	60	59	60	59	70	79	60	91	60	59
85	79929	79872	79813	79756	79701	79644	79586	79528	79672	79714
91	71161	71923	71886	71807	71949	71991	71933	71975	71917	71959
95	72019	72097	72099	72140	72181	72222	72269	72304	72346	72387
93	72385	72479	72519	72557	72597	72639	72676	73119	73159	73169
94	73549	73579	73715	73756	73796	73836	73876	73919	73957	73997
93	74038	74078	74097	74147	74186	74224	74262	74702	74741	74783
99	75196	75236	75284	75329	75369	75397	75439	75473	75511	75546
97	75587	76999	76941	76969	76118	76169	76189	76139	76256	76295
98	76719	76733	76788	76827	76864	76901	76898	76976	77011	77048
99	77482	77486	77911	77951	77987	77894	77976	77796	77749	77776
80	78178	78211	78247	78289	78918	78358	78298	78436	78482	78497
91	78869	78849	78889	78963	78926	79994	79889	79134	76198	79884
82	79149	78849	78987	79991	19727	79791	79789	78231	76856	78999
93	88277	80812	88946	98998	98614	60669	60692	60719	60939	88994
84	88988	98898	81823	81937	91989	91124	81189	81161	81114	91288
93	81914	81987	81888	91729	91797	81780	91822	91989	91888	91921
86	92282	92813	92867	92398	92619	92649	92676	92819	92943	82979
87	92899	82902	83909	98827	99009	99041	99123	88192	69197	99216
88	98306	89891	89892	99994	82996	82727	93799	83793	89822	88838
89	84189	84238	84281	84284	84943	84994	94946	84417	94449	81478
79	84919	84998	84988	94911	84949	94972	93803	82924	88089	96895
71	88491	98481	88591	99322	83392	92382	93819	99848	93373	93799
72	89894	89994	89864	98124	89199	98199	99213	89249	88272	88809
73	86829	88825	88989	88717	86767	88719	96809	89994	89994	99664
74	97218	87949	87874	97904	87884	87301	97398	97419	97448	87477
75	97795	97329	87832	97981	97918	87999	97897	87886	84024	88889
76	98899	88389	94529	94891	88989	85989	94896	99894	88189	82121
77	88898	98994	94996	89814	89948	98979	99969	88128	99194	88193
78	98497	89918	89342	98879	88397	88923	89889	99698	99796	88781
79	98897	98984	88921	88119	98159	98171	88288	88227	98259	88288
88	98588	88987	98884	98888	90997	88714	98741	88782	99789	88822
81	91119	81852	91199	81169	81222	81248	91279	91992	81329	81393
82	81641	91912	91999	91724	91791	91777	91889	91828	91929	81882
83	98186	92188	92221	92267	92279	82289	92224	82338	92976	92482
84	92648	81719	82787	92789	92749	92914	92948	92989	82881	92816
85	99187	88121	99267	88178	98229	88828	93949	91974	88988	98642
86	89782	83727	93792	93777	99692	99827	99892	99977	89982	98917
87	94291	94329	94388	94273	84399	84989	94849	94974	94389	84424
88	84994	92719	84749	84798	94792	84817	94841	84889	94898	94919
89	88182	93207	85291	93953	88976	92382	99329	82992	83278	98480
89	83883	28389	89713	92797	89791	98789	83889	89834	98829	94499
91	98142	88768	96188	99219	99297	98291	86296	99399	89992	89334
92	99814	96698	89891	98299	26789	98731	98758	89778	88881	88828
93	87881	87184	87139	97191	87174	97197	87228	97849	97267	87296
94	87847	87408	87849	87812	97989	97959	97881	97784	97727	97148
95	84988	88828	89848	94984	98891	88114	98187	88193	29182	84284
99	88489	96472	99599	84228	98943	98283	98589	98819	99832	94929
97	89888	98828	94949	98897	98888	88812	99894	98899	99879	98189
98	88244	98986	98384	99416	89482	98494	99476	99484	99919	99942
99	88782	88484	88929	88449	98478	89491	98819	88898	92927	88978
NUM.	98	69	80	89	76	79	90	91	99	69

TAVOLE TRIGONOMETRICHE

LOG. SENO

LOG. COSENO

		0′	10′	50′	30′	40′	50′		
0°	90°	∞	7,46373	7,76479	7,94084	8,06579	8,16268	179°	90°
1	91	8,24196	8,29679	8,33978	8,37505	8,40563	8,43294	178	89
2	92	8,45299	8,47757	8,49973	8,51969	8,53769	8,55393	177	88
3	93	8,57188	8,58959	8,60591	8,62104	8,63512	8,64828	176	87
4	94	8,65963	8,67099	8,68141	8,69104	8,70000	8,70838	175	86
5	85	8,71629	8,72365	8,73045	8,73675	8,74261	8,74807	174	84
6	86	8,75317	8,75799	8,76255	8,76685	8,77093	8,77480	173	83
7	87	8,77849	8,78199	8,78529	8,78840	8,79134	8,79413	172	82
8	88	8,79678	8,79928	8,80165	8,80389	8,80602	8,80805	171	81
9	89	8,80459	8,80655	8,80841	8,81017	8,81184	8,81344	170	80
10	188	8,81497	8,81644	8,81783	8,81915	8,82040	8,82159	169	79
11	181	8,82272	8,82379	8,82482	8,82580	8,82674	8,82764	168	78
12	182	8,82849	8,82929	8,83007	8,83081	8,83152	8,83220	167	77
13	183	8,83285	8,83346	8,83405	8,83462	8,83517	8,83570	166	76
14	184	8,83622	8,83671	8,83719	8,83764	8,83808	8,83850	165	75
15	185	8,83891	8,83930	8,83968	8,84004	8,84039	8,84072	164	74
16	186	8,84104	8,84135	8,84164	8,84193	8,84220	8,84246	163	73
17	187	8,84271	8,84295	8,84318	8,84341	8,84362	8,84383	162	72
18	188	8,84403	8,84422	8,84440	8,84457	8,84474	8,84490	161	71
19	189	8,84505	8,84520	8,84534	8,84547	8,84560	8,84572	160	70
20	110	8,84584	8,84595	8,84606	8,84616	8,84626	8,84635	159	69
21	111	8,84644	8,84652	8,84660	8,84667	8,84674	8,84681	158	68
22	112	8,84687	8,84693	8,84698	8,84703	8,84708	8,84713	157	67
23	113	8,84717	8,84721	8,84725	8,84728	8,84732	8,84735	156	66
24	114	8,84738	8,84741	8,84743	8,84746	8,84748	8,84750	155	65
25	115	8,84752	8,84753	8,84755	8,84756	8,84757	8,84758	154	64
26	116	8,84759	8,84760	8,84760	8,84761	8,84761	8,84761	153	63
27	117	8,84761	8,84761	8,84761	8,84761	8,84760	8,84760	152	62
28	118	8,84759	8,84758	8,84757	8,84756	8,84755	8,84753	151	61
29	119	8,84752	8,84750	8,84748	8,84746	8,84743	8,84741	150	60
30	120	8,84738	8,84735	8,84732	8,84728	8,84725	8,84721	149	59
31	121	8,84717	8,84713	8,84708	8,84703	8,84698	8,84693	148	58
32	122	8,84687	8,84681	8,84674	8,84667	8,84660	8,84652	147	57
33	123	8,84644	8,84635	8,84626	8,84616	8,84606	8,84595	146	56
34	124	8,84584	8,84572	8,84560	8,84547	8,84534	8,84520	145	55
35	125	8,84505	8,84490	8,84474	8,84457	8,84440	8,84422	144	54
36	126	8,84403	8,84383	8,84362	8,84341	8,84318	8,84295	143	53
37	127	8,84271	8,84246	8,84220	8,84193	8,84164	8,84135	142	52
38	128	8,84104	8,84072	8,84039	8,84004	8,83968	8,83930	141	51
39	129	8,83891	8,83850	8,83808	8,83764	8,83719	8,83671	140	50
40	130	8,83622	8,83570	8,83517	8,83462	8,83405	8,83346	139	49
41	131	8,83285	8,83220	8,83152	8,83081	8,83007	8,82929	138	48
42	132	8,82849	8,82764	8,82674	8,82580	8,82482	8,82379	137	47
43	133	8,82272	8,82159	8,82040	8,81915	8,81784	8,81644	136	46
44	134	8,81497	8,81344	8,81184	8,81017	8,80841	8,80655	135	45
		60′	50′	40′	30′	20′	10′		

LOG. SENO

LOG. COSENO

DI 10′ IN 10′ PER GLI ANGOLI DI 0° A 180°.

LOG. COSENO.

LOG. SENO.

		0′	10′	20′	30′	40′	50′		
0°	90°	9,999999	9,999999	9,999998	9,999998	9,999997	9,999995	180°	90°
1	91	9,999993	9,999991	9,999988	9,999983	9,999979	9,999967	179	89
2	92	9,999974	9,999960	9,999954	9,999939	9,999922	9,999947	178	88
3	93	9,999948	9,999914	9,999880	9,999818	9,999811	9,999809	177	87
4	94	9,999884	9,999859	9,999878	9,999868	9,999859	9,999845	176	86
5	95	9,999834	9,999815	9,999812	9,999808	9,999797	9,999779	175	85
6	96	9,999791	9,999749	9,999734	9,999730	9,999723	9,999659	174	84
7	97	9,999679	9,999658	9,999613	9,999627	9,999619	9,999605	173	83
8	98	9,999579	9,999557	9,999539	9,999525	9,999501	9,999489	172	82
9	99	9,999461	9,999442	9,999421	9,999408	9,999379	9,999357	171	81
10	100	9,999393	9,999318	9,999295	9,999267	9,999239	9,999219	170	80
11	101	9,999199	9,999179	9,999149	9,999119	9,999089	9,999057	169	79
12	102	9,999048	9,999019	9,998989	9,998958	9,998928	9,998891	168	78
13	103	9,998876	9,998843	9,998819	9,998783	9,998753	9,998722	167	77
14	104	9,998693	9,998659	9,998627	9,998594	9,998561	9,998529	166	76
15	105	9,998496	9,998463	9,998429	9,998391	9,998358	9,998329	165	75
16	106	9,998296	9,998263	9,998211	9,998174	9,998139	9,998099	164	74
17	107	9,998060	9,998021	9,997999	9,997949	9,997903	9,997861	163	73
18	108	9,997821	9,997779	9,997739	9,997699	9,997653	9,997615	162	72
19	109	9,997567	9,997523	9,997476	9,997435	9,997395	9,997344	161	71
20	110	9,997299	9,997258	9,997209	9,997159	9,997111	9,997063	160	70
21	111	9,997018	9,996969	9,996917	9,996869	9,996818	9,996767	159	69
22	112	9,996717	9,996663	9,996614	9,996563	9,996509	9,996456	158	68
23	113	9,996403	9,996349	9,996294	9,996240	9,996183	9,996129	157	67
24	114	9,996073	9,996017	9,995961	9,995903	9,995844	9,995785	156	66
25	115	9,995725	9,995664	9,995602	9,995540	9,995478	9,995417	155	65
26	116	9,995353	9,995291	9,995227	9,995163	9,995099	9,995034	154	64
27	117	9,994968	9,994903	9,994839	9,994773	9,994707	9,994639	153	63
28	118	9,994573	9,994505	9,994436	9,994366	9,994297	9,994227	152	62
29	119	9,994156	9,994085	9,994013	9,993940	9,993868	9,993795	151	61
30	120	9,993721	9,993647	9,993573	9,993498	9,993423	9,993348	150	60
31	121	9,993272	9,993196	9,993119	9,993042	9,992965	9,992887	149	59
32	122	9,992809	9,992730	9,992651	9,992572	9,992492	9,992412	148	58
33	123	9,992332	9,992251	9,992170	9,992088	9,992006	9,991923	147	57
34	124	9,991839	9,991756	9,991672	9,991588	9,991504	9,991419	146	56
35	125	9,991334	9,991248	9,991162	9,991075	9,990988	9,990901	145	55
36	126	9,990813	9,990724	9,990635	9,990545	9,990454	9,990363	144	54
37	127	9,990271	9,990179	9,990087	9,989993	9,989899	9,989805	143	53
38	128	9,989710	9,989614	9,989518	9,989421	9,989324	9,989226	142	52
39	129	9,989127	9,989028	9,988928	9,988828	9,988727	9,988626	141	51
40	130	9,988523	9,988419	9,988315	9,988210	9,988105	9,987999	140	50
41	131	9,987892	9,987785	9,987677	9,987569	9,987460	9,987351	139	49
42	132	9,987241	9,987131	9,987020	9,986909	9,986797	9,986685	138	48
43	133	9,986572	9,986458	9,986344	9,986229	9,986114	9,985998	137	47
44	134	9,985881	9,985763	9,985644	9,985525	9,985405	9,985284	136	46
45	135	9,985163	9,985041	9,984918	9,984795	9,984671	9,984547	135	45
		90′	50′	40′	30′	20′	10′		

LOG. COSENO.

LOG. SENO.

TAVOLE TRIGONOMETRICHE

LOG. TANGENTE

LOG. COTANGENTE

		0′	10′	20′	30′	40′	50′		
0°	90	∞	7,463725	7,764754	7,940846	8,065881	8,162726	179°	89
1	91	8,241855	8,308824	8,350766	8,381957	8,406362	8,426177	178	88
2	92	8,463525	8,497852	8,529430	8,557438	8,582063	8,603934	177	87
3	93	8,627572	8,649181	8,668753	8,686755	8,703576	8,719603	176	86
4	94	8,734632	8,748668	8,762238	8,775583	8,788898	8,802351	175	85
5	95	8,814636	8,825357	8,835670	8,845909	8,856060	8,866259	174	84
6	96	8,876083	8,885809	8,895459	8,905196	8,915298	8,925546	173	83
7	97	8,935354	8,945895	8,956538	8,967552	8,978953	8,990809	172	82
8	98	9,002942	9,015479	9,028447	9,041960	9,056141	9,071140	171	81
9	99	9,087427	9,103804	9,120574	9,137894	9,155959	9,175021	170	80
10	100	9,195102	9,215599	9,236520	9,257972	9,280107	9,303124	169	79
11	101	9,327179	9,351368	9,376194	9,401715	9,428031	9,455245	168	78
12	102	9,483524	9,512930	9,543572	9,575512	9,608809	9,643656	167	77
13	103	9,680471	9,718997	9,758762	9,800029	9,843438	9,889245	166	76
14	104	9,937531	9,988501	10,041786	10,097232	10,155096	10,215440	165	75
15	105	10,278543	10,344477	10,413885	10,486544	10,562291	10,641728	164	74
16	106	10,724757	10,811578	10,902545	10,997941	11,097599	11,201968	163	73
17	107	11,309932	11,423796	11,544640	11,672820	11,808536	11,952668	162	72
18	108	12,078037	12,254218	12,480402	12,763779	13,105197	13,563485	161	71
19	109	14,300666	15,526742	17,169338	19,568438	24,900960	38,188130	160	70
20	110	57,289962	114,588650	343,773768	∞	343,773768	114,588650	159	69
21	111	38,188130	24,900960	19,568438	17,169338	15,526742	14,300666	158	68
22	112	13,563485	13,105197	12,763779	12,480402	12,254218	12,078037	157	67
23	113	11,952668	11,808536	11,672820	11,544640	11,423796	11,309932	156	66
24	114	11,201968	11,097599	10,997941	10,902545	10,811578	10,724757	155	65
25	115	10,641728	10,562291	10,486544	10,413885	10,344477	10,278543	154	64
26	116	10,215440	10,155096	10,097232	10,041786	9,988501	9,937531	153	63
27	117	9,889245	9,843438	9,800029	9,758762	9,718997	9,680471	152	62
28	118	9,596485	9,563779	9,532820	9,503779	9,476693	9,451284	151	61
29	119	9,427811	9,405304	9,383486	9,362299	9,341691	9,321636	150	60
30	120	9,302219	9,283329	9,265010	9,247221	9,230004	9,213305	149	59
31	121	9,197366	9,181941	9,166997	9,152501	9,138434	9,124760	148	58
32	122	9,111460	9,098483	9,085798	9,073372	9,061190	9,049240	147	57
33	123	9,037507	9,025971	9,014623	9,003457	8,992465	8,981640	146	56
34	124	8,971006	8,960553	8,950268	8,940140	8,930162	8,920327	145	55
35	125	8,910628	8,901060	8,891615	8,882290	8,873080	8,863980	144	54
36	126	8,854986	8,846098	8,837311	8,828624	8,820033	8,811536	143	53
37	127	8,803128	8,794811	8,786581	8,778436	8,770374	8,762392	142	52
38	128	8,754488	8,746660	8,738906	8,731225	8,723615	8,716076	141	51
39	129	8,708603	8,701190	8,693832	8,686527	8,679274	8,672072	140	50
40	130	8,664919	8,657811	8,650747	8,643726	8,636747	8,629810	139	49
41	131	8,622914	8,616054	8,609227	8,602432	8,595668	8,588935	138	48
42	132	8,582232	8,575558	8,568911	8,562291	8,555697	8,549128	137	47
43	133	8,542584	8,536063	8,529567	8,523095	8,516647	8,510222	136	46
44	134	8,503821	8,497442	8,491085	8,484750	8,478436	8,472143	135	45
		30′	40′	50′	0′	10′	20′		

LOG. TANGENTE

LOG. COTANGENTE

DI 10′ IN 10′ PER GLI ANGOLI DI 0° A 180°.

LOG. COTANGENTE.

LOG. TANGENTE.

		0′	10′	20′	30′	40′	50′		
0°	89°	∞	2,00921	2,00924	2,02916	1,03110	1,93721	179°	90°
1	81	1,20808	1,00111	1,60911	2,39193	1,23010	1,69473	178	88
2	82	1,53002	1,52210	1,99921	1,00021	1,33104	1,90941	177	87
3	83	1,20909	1,01109	1,20410	1,01301	1,10928	1,17099	176	89
4	84	1.19099	1.18701	1,18941	1,19192	1,20819	1,01184	175	91
5	85	1.99995	1,96679	1,97991	1,81842	1,00330	0,99979	174	95
6	86	0'97833	0,09008	0,96472	0,04394	0,09999	0,93140	173	80
7	87	0,01283	0.80030	0,80034	0,88091	0,87881	0,00149	172	82
8	88	0,90020	0,95310	0,80110	0,82300	0,91034	0,00304	171	81
9	90	0,09029	0,79219	0,70410	0,77900	0,79279	0,79110	170	88
10	190	0,70000	0,74909	0,70014	0,73100	0,70304	0,11914	190	79
11	101	0,71130	0,70400	0,69890	0,99134	0,99011	0,97813	188	18
12	102	0,97033	0,09039	0,00000	0,93424	0,94030	0,04249	187	17
13	103	0,93004	0,03031	0,01304	0,01093	0,21411	0,00004	186	78
14	104	0,99323	0,09709	0,00303	0,09734	0,08018	0,07709	185	76
15	105	0,91193	0,90902	0,90134	0,00791	0,03113	0,91720	184	75
16	106	0,84209	0,89179	0,00000	0,90049	0,01379	0,01329	183	74
17	107	0,01438	0,01919	0,99370	0,09129	0,80980	0,82804	182	73
18	108	0,89322	0,80304	0,87090	0,81313	0,87100	0,80710	181	72
19	109	0,80099	0,83474	0,83358	0,80980	0,83949	0,83288	180	71
20	110	0,80893	0,82808	0,82112	0,82128	0,82332	0,81861	100	70
21	111	0,81081	0,81906	0,80828	0,80499	0,80001	0,00134	159	69
22	112	0,09900	0,29994	0,29656	0,29370	0,21321	0,11067	101	81
23	113	0,91210	0,28965	0,28618	0,28113	0,30930	0,00183	100	80
24	114	0,70142	0,11803	0,24465	0,24133	0,30799	0,00593	100	63
25	115	0,90130	0,23804	0,23478	0,23139	0,31929	0,21090	154	64
26	116	0,91192	0,20801	0,20043	0,20219	0,20011	0,19099	103	65
27	117	0,19290	0,.9072	0,28862	0,28032	0,27049	0,21736	102	66
28	118	0,91400	0,27103	0,29410	0,29004	0,00223	0,23018	101	61
29	119	0,19929	0,10027	0,20031	0,24739	0,21449	0,24149	100	60
30	120	0,23900	0,22000	0,09273	0,12000	0,23891	0,23490	259	60
31	121	0,21120	0,01351	0,21902	0,21109	0,09280	0,09790	158	59
32	120	0,39401	0,20149	0,19860	0,19391	0,10299	0,19000	157	61
33	123	0,18740	0,19470	0,18197	0,17011	0,17354	0,17076	156	59
34	124	0,17181	0,16820	0,16090	0,16197	0,15916	0,10749	155	56
35	125	0,15411	0,16299	0,14961	0,14670	0,14400	0,14149	154	54
36	126	0,13974	0,13609	0,13044	0,12970	0,12919	0,12090	153	54
37	127	0,12230	0,11909	0,11704	0,11500	0,11041	0,10099	152	53
38	128	0,10713	0,10410	0,10130	0,09930	0,09648	0,09428	151	52
39	129	0,09100	0,08993	0,08647	0,08399	0,08139	0,07971	150	51
40	130	0,07810	0,07992	0,07109	0,06950	0,06804	0,06690	199	50
41	131	0,06504	0,06338	0,06174	0,06010	0,05860	0,05710	198	49
42	132	0,05403	0,05332	0,05160	0,05101	0,04951	0,04180	197	47
43	133	0,04334	0,04201	0,04120	0,04070	0,03921	0,03109	196	46
44	134	0,03319	0,03269	0,03122	0,03139	0,03000	0,02900	195	45
	′	60′	50′	40′	30′	20′	10′		

LOG. COTANGENTE.

LOG. TANGENTE.

Se x fosse comproso tra 180° e 270° si adopreroblero le formule:

$$\begin{aligned} &\text{sen. } (180^\circ + t) \\ &= -\text{ seo. } (180^\circ - t) = -\text{ aen } t, \\ &\text{cos. } (180^\circ + t) \\ &= \text{ cos. } (180^\circ - t) = -\text{cos. } t \end{aligned}$$

ovvoro le altre:

$$\begin{aligned} &\text{sen. } (270^\circ - t') \\ &= -\text{ sen. } (90^\circ - t') = -\text{ cos. } t', \\ &\text{cos. } (270^\circ - t') \\ &= -\text{ eos. } (90^\circ - t') = -\text{ sen. } t' \end{aligned}$$

Finalmente se x è comproso tra 270° o 360° si adopreranno le formule:

$$\begin{aligned} &\text{seu. } (270^\circ + u') \\ &= -\text{ seu. } (90^\circ - u') = -\text{ cos. } u' \\ &\text{cos. } (270^\circ + u') \\ &= \text{ cos. } (90^\circ - u') = \text{ sen. } u' \end{aligned}$$

I valori correlativi delle altre linee trigonometriche si dedueono da quelli del seno e del eoseno per mezzo delle cioque formule seguenti, le quali bastano per potero esprimere una qualanque delle sei linee trigonometriche in funzione delle altre e del raggio.

Si ottiene la prima dalle proprietà del triangolo rettangolo; la 2ª e la 3ª si ottengono dai triangoli simili OMP, OTA; la (fig. 136) 4ª e la 5ª dai triangoli simili OMQ OSR.

1ª $\text{Sen.}^2 a + \text{cos.}^2 a = r^2$

2ª $\text{Tang. } a = \dfrac{r \text{ sen. } a}{\text{eos. } a}$

3ª $\text{Sec. } a = \dfrac{r^2}{\text{cos. } a}$

4ª $\text{Cnt. } a = \dfrac{r \text{ cos. } a}{\text{sen. } a}$

$\text{Cosec. } a = \dfrac{r^2}{\text{sen } a}$

Le prime tre danno

$$\text{sec.}^2 a = r^2 + \text{tang.}^2 a$$

la prima eombinata con lo due ultimo da

$$\text{cosec.}^2 a = r^2 + \text{cotang}^2 a$$

Se in queste formule e in tutte quello della trigonometria si suppone il raggio r uguale all'unità, queste formulo divengono più aemplici, ma eesaano però di essere omogenee.

Risoluzione dei triangoli rettilinei rettangoli. Rapproseenteremo con A,B,C i tro angoli del triangolo e eon a,b,c i lati opposti a queati angoli. Nel triangolo rettangolo A rappresenta l'angolo retto ed a l'ipoteousa; i quattro casi ehe possono preaentarsi nella risoluzione, sono esposti nel quadro sottoposto.

Dati	*Valori delle incognite*
a, B.	$C = 90^\circ - B$ $b = a$ aen. B $c = a$ cos. B
b, B.	$C = 90^\circ - B$ $a = \dfrac{b}{\text{aeu. B}}$ $c = b$ eot. B
a, b.	$c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$ Sen. $B = \dfrac{b}{a}$ $C = 90^\circ - B$.
b, c.	Tang. $B = \dfrac{b}{c}$ $C = 90^\circ - B$ $a = \dfrac{b}{\text{sen.B}}$

Risoluzione dei triangoli rettilinei qualunque. Questa pure può presentaro quattro casi distinti cho sono raccolti nella tavola seguente:

Dati	*Valori delle incognite*
a, B, C,	$A = 180^\circ - (B + C)$ $b = \dfrac{a \text{ sen. B}}{\text{aeo. A}}$ $c = a \dfrac{\text{sen. C}}{\text{seo. A}}$
a, b, A	sen. $B = \dfrac{b \text{ sen. A}}{a}$ $C = 180^\circ - (A + B)$ $c = \dfrac{a \text{ sen C}}{\text{sen. A}}$ se si pono son. $\varphi = \dfrac{b \text{ sen. A}}{a}$ $c = \dfrac{a \text{ sen. } (\varphi + A)}{\text{sen. A}}$

Seno B potendo corrispondero a dno valori di B uno più grande l'altro minoro di 90°, ci saranno due soluzioni, ma se l'angnln A $> 90^\circ$ le due soluzinni si riducono ad una sola. Se seno R diviene maggiore dell'unità, il problema è impossibile.

a, *b*, C.

$$A+B=180^\circ-C$$

$$\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\,\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A+B)$$

$$A=\tfrac{1}{2}(A+B)+\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$B=\tfrac{1}{2}(A+B)-\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$c=\frac{a\ \text{sen. C}}{\text{sen. A}},\ \text{o ancora}$$

$$c=\frac{(a+b)\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}C}{\cos.\ \tfrac{1}{2}(A-B)}$$

a, *b*, *c*. Ponendo $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ si avrà

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)\ (p-c)}{b\ c}}$$

Gli altri angoli B e C si determinano con formule identiche a questa.

RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI SFERICI RETTANGOLI. La tavola sottoposta contiene le soluzioni dei sei casi che possono aver luogo: *a* rappresenta sempre l'ipotenusa, *a*, *b*, *c* sono ora agli archi che misurano gli angoli al vertice di un triedro; ed A, B, C rappresentano le inclinazioni dei piani in cui giacciono questi archi.

Dati	*Valori delle incognite*
a, *b*.	Cos. $c=\frac{\cos.\ a}{\cos.\ b}$, Sen. $B=\frac{\text{sen. }b}{\text{sen. }a}$, Cos. $C.=\frac{\text{tang. }b}{\text{tang }a}$, Secondo che l'angolo *b* è acuto, retto od ottuso B lo sarà puro.
b, *c*.	Cos. $a=\cos.\ b\ \cos.\ c$, Tang. $B=\frac{\text{tang }b}{\text{sen. }c}$, Tang. $C.=\frac{\text{tang. }c}{\text{sen. }b}$,
a, B.	Sen. $b=\text{sen. }a\ \text{sen. B}$, Tang. $c=\text{tang. }a\ \cos.\ B$, Cot. $C=\cos.\ a\ \text{tang. B}$. Qui pure *b* è acuto, retto od ottuso quando lo è B.
b, B.	Sen. $a=\frac{\text{sen. }b}{\text{sen. B}}$, Sen. $c=\frac{\text{tang. }b}{\text{tang B}}$, Sen. C. $=\frac{\text{cos. B}}{\cos.\ b}$. Può essere preso a piacere $a>90^\circ$ o $a<90^\circ$ ma il valore di *c* che dipende dalla relazione $\cos.\ a=\cos.\ b\ \cos.\ c$ sarà determinato in conseguenza del valore di *a*; e quando *c* sarà acuto, retto od ottuso, lo sarà pure C.
b, C.	Tang. $a=\frac{\text{tang }b}{\cos.\ C}$, Tang. $c=\text{sen. }b\ \text{tang. C}$. Cos. $B=\cos.\ b\ \text{sen. C}$.
B, C.	Cos. $a=\text{cot. B cot. C}$, Cos. $b=\frac{\text{cos. B}}{\text{sen. C}}$, Cos. $c=\frac{\text{cos C}}{\text{sen. B}}$.

RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI SFERICI QUALUNQUE. La tavola seguente contiene i sei casi relativi a questa risoluzione.

Dati	*Valori delle incognite*
a, *b*, *c*.	Ponendo $a+b+c=2p$, viene Sen. $\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\text{sen }(p-b)\,\text{sen.}(p-c)}{\text{sen }b\ \text{sin }c}}$ I valori degli altri angoli si ottengono per mezzo di formule che si deducono da questa col porre *a* invece di *b* quando si cerca B, e col porre *a* invece di *c* quando si cerca C.
a, *b*, .A	Sen. $B=\frac{\text{sen A sen }b}{\text{sen. }a}$, Tang. $\frac{1}{2}c=\text{tang. }\frac{1}{2}(a-b)\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(A-B)}$ Cot. $\frac{1}{2}C=\text{tang. }\frac{1}{2}(A-B)\frac{\text{sen. }\frac{1}{2}(a+b)}{\text{sen. }\frac{1}{2}(a-b.}$ B può essere acuto o ottuso.

$a, b, C.$
$$\text{Tang.}\frac{1}{2}(A+B)=\cot.\frac{1}{2}C\,\frac{\cos.\frac{1}{2}(a-b)}{\cos.\frac{1}{2}(a+b)},$$
$$\text{Tang.}\frac{1}{2}(A-B)=\cot.\frac{1}{2}C\,\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(a+b)},$$
$$A=\frac{1}{2}(A+B)+\frac{1}{2}(A-B),\quad B=\frac{1}{2}(A+B)-\frac{1}{2}(A-B),$$
$$\text{Sen.}\,c=\frac{\text{sen.}\,a\,\text{sen.}\,C}{\text{sen.}\,A}.$$

$c, A, B.$
$$\text{Tang.}\frac{1}{2}(a+b)=\text{tang.}\frac{1}{2}c\,\frac{\cos.\frac{1}{2}(A-B)}{\cos.\frac{1}{2}(A+B)},$$
$$\text{Tang.}\frac{1}{2}(a-b)=\text{tang.}\frac{1}{2}c\,\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(A+B)},$$
$$\text{Sen.}\,C=\frac{\text{sen.}\,c\,\text{sen}\,A}{\text{sen.}\,a}.$$

a, A, B
$$\text{Sen.}\,b=\frac{\text{sen.}\,a\,\text{sen.}\,B}{\text{sen.}\,A},$$
$$\text{Tang.}\frac{1}{2}c=\text{tang.}\frac{1}{2}(a-b)\,\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(A-B)},$$
$$\text{Cot.}\frac{1}{2}C=\text{tang.}\frac{1}{2}(A-B)\,\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(a-b)}.$$

$A, B, C,$ Penendo $A+B+C=180°+2P$ si ottiene
$$\cos.\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\text{sen.}(B-P)\,\text{sen.}(C-P)}{\text{sen.}\,B.\,\text{sen.}\,C}}.$$
Cos. $\frac{1}{2}b$ si ottiene ponendo b in luogo di a ed A in luogo di B nella formula di sopra, cos. $\frac{1}{2}c$ ponendovi c in luogo di a ed A in luogo di C.

I tre ultimi casi sono analoghi ai tre primi, e possono ricondursi a quelli per mezzo delle proprietà del triangolo polare (vedi pag. 117) il quarto si riconduce al terzo, il quinto al secondo, il sesto al primo.

Il secondo caso ed il quinto meritano considerazione particolare. E per agevolare la ricerca delle diverse soluzioni, abbiamo raccolto nelle tavole seguenti i casi che possono occorrere quando sono dati a, b ed A.

1° per $A < 90°$

$b < 90°$: $a < b$ due soluzioni; $a \geqq b$ una; $a + b \geqq 180°$ nessuna

$b > 90°$: $a + b < 180°$ due soluzioni; $a + b \geqq 180°$ una; $a \geqq b$ nessuna

$b = 90°$: $a < b$ due soluzioni; $a \geqq b$ nessuna

2° per $A > 90°$

$b < 90°$: $a + b > 180°$ 2 soluzioni; $a + b \leqq 180°$ 1 soluzione; $a \leqq b$ nessuna

$b > 90°$: $a > b$ 2 soluzioni; $a \leqq b$ 1 soluzione; $a + b \leqq 180°$ nessuna

$b = 90°$: $a > b$ 2 soluzioni; $a \leqq b$ nessuna

3° Per $A = 90°$

$b < 90°$: $a > b$ 1 soluzione; $a \leqq b$ nessuna; $a + b \geqq 180°$ nessuna

$b = 90°$: $a = 90°$ un numero indeterminato di sol.; $a \lessgtr 90°$ nessuna.

La considerazione del triangolo polare permette di applicare questi risultati al triangolo che ha per elementi A, B, a considerato nel quinto caso. Basta per questo cangiare a, b, A respettivamente in A, B, a e il segno $>$ in $<$ e $<$ in $>$.

Le costruzioni grafiche eseguite sopra un piano possono dare dei valori abbastanza vicini al vero degli elementi dei triangoli rettilinei e sferici che ci proponiamo di risolvere; però non bisogna trascurare queste indicazioni e verificazioni approssimate. Vedi per ciò che riguarda i triangoli rettilinei le pag. 90, 101, e pei triangoli sferici i problemi sui triedri alla pag. 130. Ci basti qui il rammentare che ogni triedro corrisponde ad un triangolo sferico, e il triedro supplementare al triangolo sferico polare.

Uso delle tavole trigonometriche. Queste tavole contengono in generale non i valori delle linee trigonometriche, ma i logaritmi corrispondenti a questi valori. Le formule precedenti che servono alla risoluzione dei triangoli rettilinei e sferici, si prestano benissimo al calcolo per mezzo dei logaritmi.

Siccome però i seni e coseni di tutti gli angoli possibili, e le tangenti degli angoli minori di 45° sono minori del raggio; ponendo questo uguale all'unità, i logaritmi delle linee trigonometriche contenute nelle tavole sono negativi. Per renderli positivi si aggiungono a ciascuno dieci unità, e si sottrae dai risultati ai quali conduce il calcolo il più gran multiplo di dieci in essi contenuto.

Abbiamo qui riunite le tavole trigonometriche alla logaritmiche, ed altrove (pag. 36) abbiamo insegnato il modo di adoperarle. Queste tavole danno i logaritmi dei seni, coseni, tangenti e cotangenti di tutti gli angoli compresi tra 0° e 180°, di 10 in 10 minuti, con cinque decimali.

Lo stesso logaritmo corrisponde sempre a quattro linee trigonometriche di angoli differenti. Così nella prima pagina della nostra tavola seguendo la linea orizzontale che comincia a sinistra col numero 17° sino all'incontro della colonna verticale che ha in testa 40′ si trova 9,48213 che è il logaritmo del seno di 17°, 40′, e nel tempo stesso del coseno di 72° 20′, del coseno di 107 40′ e del seno di 162° 20′, perchè si ha in generale

$$\text{sen. } x = \cos.\ (90° - x)$$
$$= -\cos.\ (90° + x) = \text{sen. } (180° - x)$$

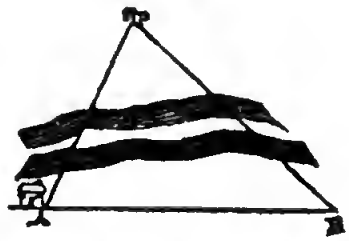
Quindi appare il modo di leggere nella tavola. La parola Log. seno corrisponde al numero dei gradi segnati nella colonna a sinistra e a quello dei minuti posto in fronte della tavola: la parola Log. coseno corrisponde al numero dei gradi segnati nella seconda colonna di sinistra ed allo stesso numero di minuti; la parola Log. coseno posta in pie di pagina corrisponde al numero dei gradi della ultima colonna a destra ed ai minuti posti in piè di pagina; finalmente la parola Log. seno posto in pie della pagina sotto la parola Log. coseno corrisponde ai minuti posti in piè di pagina, e ai gradi segnati nella penultima colonna.

Questa disposizione è fondata sulla corrispondenza che esiste tra i valori delle linee trigonometriche dei quattro angoli $45° - x$, $45° + x$, $135° - x$, $135° + x$, i valori assoluti del seno della tangente della secante di due di questi angoli, essendo uguali ai valori del coseno, della cotangente, delle cosecante degli altri due.

Non entreremo in particolari sull'uso delle tavole trigonometriche di Lalande di Borda, di Callet, di Gnepratte ec. perchè quelli che vogliono adoperarle, conoscono abbastanza il calcolo dei logaritmi per intendere le istruzioni dalle quali sono precedute; e ci limiteremo a pochi esempi numerici nei quali adopreremo soltanto le tavole riunite alla presente pubblicazione.

1° Esempio. Trovare la distanza da un punto A (fig. 137) nel quale si fa sta-

137



zione ad un punto P inaccessibile ma visibile.

Si misura una base AB e gli angoli PAB, PBA, e non resta che a risolvere un triangolo rettilineo del quale si conosce un lato e due angoli.

Si prenda AB = 247m,49
A = 62° 41′
B = 59° 42′

si dedurrà $P = 57° 37'$
ora Log. $245,5 = 2,39358$
log. sen. $59° 40' = 9,93606$
complem. log. sen. $57° 35' = 0,07357$

Somma . . . . $12,40321$

Si ha dalle tavole

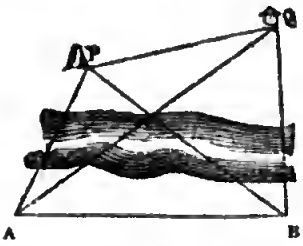
$2,40312 =$ Log. $253,0$

perciò la distanza cercata AP sarà uguale a 253 metri in circa.

Il calcolo, esatto fatto con le tavole di Callet da 253^m, 032.

2° Esempio Trovare la distanza PQ di duo punti P e Q inaccessibili ma visibili (fig. 138).

138



Si misura una base $AB = 345^m 29$
$BAP = 69° 26'$
$BAQ = 44° 31'$
$PAQ = 25° 41'$
$ABP = 48° 13'$
$ABQ = 102° 14'$

Quando i duo triangoli PAB e BAQ non giacciono nel medesimo piano, l'angolo PAQ è maggiore della differenza tra PAB è QAB. Si comincerà a calcolare AP conoscendo la base e duo angoli del triangolo PAB.

Si calcolerà AQ nel modo stesso rispetto al triangolo QAB.

Conosciuto AP ed AQ per mezzo del calcolo, e misurato l'angolo compreso tra questi duo lati, si potrà calcolare il terzo lato PQ del triangolo APQ, per mezzo delle formule relative al terzo caso della risoluzione dei triangoli obliquangoli in cui i dati sono a, b, C.

1° Calcolo di AP

log. $345,5 = 2,53845$
log. sen. $48° 10' = 9,87221$
Complem. log. sen. $62° 20' = 0,05273$

Somma $12,46339$
$2,46339 =$ log. 291

2° calcolo di AQ.

log. $345,5 = 2,53845$
log. sen. $102° 10' = 9,99013$
complem. log. sen. $33° 20' = 0,26195$

Somma $12,79053$
$2,79053 =$ log. 617,5

3° Calcolo degli angoli APQ ed AQP

$AQ + AP = 908,5$
$AQ - AP = 326,5$

$\frac{1}{2}(APQ + AQP) = 77° 9' 30''$

log. tang. $77° 10' = 0,64243$
log. $326,5 = 2,51388$
complem. log. $908,5 = 7,04168$

Somma $10,19799$
$0,19799 =$ log. tang. $57° 40'$

$\frac{1}{2}(APQ - AQP) = 57° 40'$

$APQ = 134° 49'$
$AQP = 19° 29'$

4° Calcolo di PQ.

log. $291 = 2,46339$
log. sen. $25° 40' = 9,63662$
complem. log. sen. $19° 30' = 0,47650$

Somma $12,57650$
$2,57651 =$ log. 376,5.

Il valore esatto di PQ calcolato colle tavole di Callot è 375, 11. Perciò nel calcolo nostro vi è un errore in più di 1, 39 sopra 375, 11, ossia $\frac{1}{270}$ circa del valore vero. Questa approssimazione è bastante per un gran numero di casi. Bisogna d'altronde osservare che si potrebbe anco con queste tavole ottenere una approssimazione più grande, prendendo delle medie tra i logaritmi delle tavole, quando i numeri che si trattano col calcolo non sono esattamente quelli in esse tavole contenuti.

§ 17. *Geometria analitica*.

Principii fondamentali. La geometria analitica insegna a risolvere per mezzo dell'algebra i problemi di geometria. La trigonometria fa parte della geometria analitica, insegnando ad esprimere per mezzo di formule algebriche le relazioni di grandezza dei lati e degli angoli di un triangolo.

Viète dopo avere ridotto a regole il calcolo algebrico, lo applicò alla ricerca delle incognite in una figura, esprimendo con equazioni le condizioni che legano tra loro le relazioni delle diverse parti di essa, e cavando da queste equazioni il valore delle incognite. Così fece i primi passi verso il concetto di Descartes, il quale nella sua geometria dà il modo di tradurre le operazioni algebriche le costruzioni geometriche, insegna come si debbano per mezzo dell'algebra studiare le proprietà geometriche delle curve, e dà sulla risoluzione dei problemi geometrici per mezzo dell'algebra la seguente regola.

« Qualunque problema si voglia risolvere deve primieramente considerarsi come risoluto, dare dei nomi a tutte le linee che sembrano necessarie per costruirlo, tanto alle incognite che cognite. Quindi senza far differenza tra le linee cognite ed incognite, percorrere la difficoltà secondo l'ordine che mostra nel modo il più naturale la mutua dipendenza delle une dalle altre, sinchè siasi trovato la maniera di esprimere la stessa quantità in due diverse forme; il che dicesi formare l'equazione. Si debbono trovare tante di queste equazioni quante sono le linee supposte incognite.

Trattandosi per esempio di dividere una retta in media ed estrema ragione (V. pag. 102) il valore del maggior segmento x sarà dato dall'equazione

$$x^2 = a\,(a - x),$$

della quale si deduce

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$$

Il primo valore è il solo che convenga al problema nel modo in cui è stato proposto, e dà (fig. 139) il valore di AM facendo

$$AB = a \text{ e } CB = \frac{1}{2}\,a$$

perciò

$$AC^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}$$

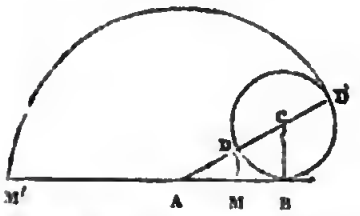
$$AC = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$AD = AM = AC = DC - D'$$

$$= -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Ma il secondo è quello che si troverebbe cercando sul prolungamento della retta BA (fig. 139) un punto M' tale che

139



AM' fosse media proporzionale tra l'intera AB ed AB + AM'; questo valore di x è negativo perchè la linea AM' è presa nel senso opposto della linea AM, che è il valore positivo della soluzione.

In generale trattando con l'algebra i problemi di geometria, e prendendo per incognita una linea qualunque contata in una data direzione, partendo da un punto fisso, e andando verso destra per esempio, le soluzioni positive si contino in questa direzione, le soluzioni negative dovranno esser contate nella direzione opposta dal punto fisso verso sinistra sul prolungamento della stessa linea. Ma quando si cerca una distanza incognita dalla parte opposta a quella in cui deve essere posta: l'errore della supposizione è indicato talora da valori immaginarii, invece di essere rettificato dai valori negativi. Ciò accaderebbe nell'esempio precedente, se si supponesse che il punto cercato fosse a destra del punto B sulla linea AB.

Trovati per mezzo dell'algebra i valori della incognita bisogna costruirli geometricamente. Perciò bisogna osservare primieramente che se si tratta di una linea l'espressione deve essere lineare, cioè composta di termini nei quali il grado del numeratore è maggiore di una unità di quello del denominatore. Questa condizione deve essere sempre soddisfatta. Accade tuttavia quando si prende per unità qualcuna delle linee della questione, che qualcuno dei fattori del numeratore o del denominatore è sottinteso,

Costruzioni delle espressioni algebriche. Mostreremo su qualche esempio come per mezzo di costruzioni geometriche si eseguiscano tutte le operazioni dell' algebra.

Il valore $x = \frac{ab}{c}$ si costruisce per mezzo di una quarta proporzionale alle linee c, a, b, (v. prob. XVIII pag. 102) Se si supponesse $c = 1$ la quarta proporzionale sarebbe il prodotto di a per b.

Se invece si ponesse $b = 1$ la quarta proporzionale sarebbe il quoziente $\frac{b}{c}$.

Le linee a, b, c, x ec. sono sempre riferite alla stessa unità di misura.

Si potrà costruire senza difficoltà l' espressione

$$x = \frac{A^m B^n C^p}{a^{m'} b^{n'} c^{p'}}$$

prendendo

$$\alpha = \frac{A^2}{a}$$

$$\beta = \frac{\alpha A}{a} = \frac{A^3}{a^2}$$

$$\gamma = \frac{B A}{a} = \frac{A^4}{a^3} \text{ ec.}$$

e così seguitando si otterrà per mezzo di quarte proporzionali un' espressione di x della forma $x = \frac{\psi C}{c}$.

Per costruire

$$x = \frac{abc - d^3}{mn + p^2}$$

si porrà

$$abc = d^2 \alpha, \quad mn = d\beta, p^2 = d\gamma$$

e si avrà

$$x = \frac{d^2(\alpha - d)}{d(\beta + \gamma)} = \frac{d(\alpha - d)}{(\beta + \gamma)}$$

dove x rappresenta una quarta proporzionale dopo $\beta + \gamma$, $\alpha - d$, e d; e le linee ausiliari α, β, γ date dalle relazioni

$$\alpha = \frac{abc}{d^2}, \beta = \frac{mn}{d}, \gamma = \frac{p^2}{d}$$

si costruiscono nel modo insegnato di sopra. Per cui tutto l' artifizio di questo metodo consiste nel trasformare il numeratore e il denominatore in prodotti composti di fattori di primo grado.

Passiamo a considerare i più semplici radicali di secondo grado

$$\sqrt{ab}, \quad \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Il primo rappresenta una media proporzionale tra a e b (V. prob. XIX pag. 102).

Il secondo è l' ipotenusa del triangolo rettangolo in cui i lati a e b comprendono l' angolo retto.

Il terzo è il lato di un triangolo rettangolo che ha per ipotenusa a e per terzo lato b. Si può ancora considerare

$$\sqrt{a^2 - b^2}$$

come una media proporzionale tra $a + b$ ed $a - b$.

Per costruire un radicale di secondo grado più complicato, bisogna trasformare la quantità sotto il segno radicale in una frazione, nella quale il denominatore ed il numeratore siano prodotti di linee.

Un radicale che abbia per indice una potenza di 2 può sempre costruirsi per mezzo della riga e del compasso: sia per esempio

$$x = \sqrt[4]{\frac{a^7 - 3a^4 b^3 + b^7}{a^3 + b^3}}$$

ponendo $b^7 = a^6 \alpha$, e $b^7 = a^6 \beta$ si avrà

$$x = \sqrt[4]{\frac{a^4 (a - 3\alpha + \beta)}{a + \alpha}}$$

e quindi ponendo

$$\alpha \frac{(a - 3\alpha + \beta)}{a + \alpha} = \gamma \text{ e } \sqrt{\alpha\gamma} = \delta$$

$$x = \sqrt[4]{a^3 \gamma} = \sqrt{a \sqrt{a\gamma}} = \sqrt{a \sqrt{a\delta}}.$$

Per costruire le radici di una equazione di secondo grado, non è necessario

risolvere l'equazione; ma basta osservare che l'equazione

$$x^2 - a\,x = -b^2$$

può mettersi sotto la forma

$$x\,(a - x) = b^2$$

e che le radici x ed $a - x$ sono tali che la loro somma è a ed il prodotto loro è b^2; onde bisogna costruire un rettangolo equivalente al quadrato b^2, nel quale la somma dei lati sia a come nel prob. XXV, pag. 103.

L'equazione

$$x^2 + ax = -b^2$$

la quale differisce dalla precedente, solo perchè la somma delle sue radici è $-a$ invece di a, si costruisce come la precedente.

L'equazione $x^2 - a\,x = +b^2$

si riduce ad $x\,(x - a) = b^2$.

Le radici x e $-(x-a)$ sono tali che la loro differenza è a e il prodotto b^2, per cui bisogna costruire il rettangolo equivalente al quadrato dato b^2, i cui lati hanno fra loro la differenza a, come nel problema XXVI, pag. 103.

L'equazione $x^2 + ax = +b^2$ si costruisce come la precedente; per cui si costruiscono generalmente i valori assoluti dell'equazione generale di secondo grado

$$x^2 \pm ax = \pm b^2.$$

Non è possibile costruire con la riga o col compasso le espressioni irrazionali che non possono ridursi a radicali di secondo grado.

Perciò gli antichi non han potuto risolvere i famosi problemi della *duplicazione del cubo* e della *trisezione dell'angolo*, che adoprando le sezioni coniche o altre linee differenti dalla retta e dalla circonferenza.

ESPRESSIONI ALGEBRICHE DI ALCUNI RISULTATI DI GEOMETRIA. Rammenteremo primieramente alcune espressioni eleganti dell'area di un triangolo, in funzione dei differenti elementi che determinano questo triangolo.

1° Dati i tre lati a, b, c e posto $2p = a + b + c$ si avrà l'area:

$$A = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

2° Si chiamino a', b', c', le tre rette condotte dai vertici del triangolo sulla metà dei lati opposti, le quali si tagliano in uno stesso punto, e ponendo

$$2p' = a' + b' + c'$$

si avrà pure

$$A = \frac{3}{2}\sqrt{p'\,(p'-a')\,(p'-b')\,(p'-c')}$$

3° Designando le h, h', h'' le tre altezze del triangolo e ponendo

$$2\,H = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} \text{ si avrà}$$

$$\frac{1}{A} = 4\sqrt{H\left(H - \frac{1}{h}\right)\left(H - \frac{1}{h'}\right)\left(H - \frac{1}{h''}\right)}$$

L'area di un quadrilatero iscritto i cui quattro lati sono a, b, c, d è rappresentata da

$$A = \sqrt{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,(p-d)}$$

dove $2p = a + b + c + d$.

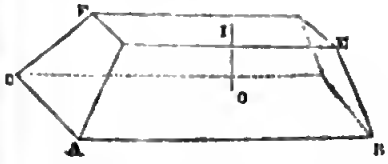
L'area del trapezio espressa in funzione dei quattro lati è

$$A = \frac{a+c}{a-c}\sqrt{(p-a)\,(p-c)\,(p-b-c)\,(p-c-d)}$$

a e c sono i due lati paralleli e si ha $2p = a + b + c + d$.

Dato un solido (fig. 150) compreso tra

150



due rettangoli BC ed EF, i cui piani sono paralleli e le facce laterali sono in conseguenza trapezi, si prenda $AB = a$ $AC = b$ $DE = c$ $DF = d$, e si chiami h la distan-

za OI delle due basi parallele. L'espressione del volume V del solido sarà

$$V = \frac{h}{6}\left(ab + cd + (o + c)(b + d)\right)$$

facendo

$$o = 2^m,50;\ b = 1^m,50;\ c = 1^m,50,\ d = 0^m,50,\ h = 0^m,50$$

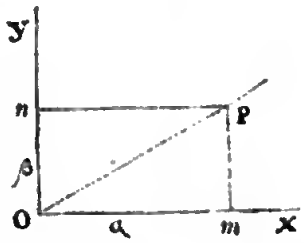
ne resulta

$$V = 1,^{mc}04166.$$

Tali sono la forma e le dimensioni che si danno ai monti di rena e di sassi destinati al mantenimento delle strade, e che si valutano ad un metro cubo trascurando l'eccesso 0,0417.

Coordinate rettangolari. Per fissare per mezzo del calcolo la posizione di un punto p sopra un dato piano, si sup-

141



pongono condotti in questo piano (fig. 141) due assi ad angolo retto Ox, Oy, e dal punto p si abbassano le perpendicolari sopra questi assi, la linea $Om = np$ dicesi l'ascissa x del punto p e la linea $pm = On$ dicesi l'ordinata y del punto p; il punto è determinato per mezzo delle sue coordinate rettangolari x ed y che fissano la sua distanza dagli assi.

Se vogliamo la distanza r del punto p al punto O che dicesi l'origine, questa sarà data da

$$r^2 = x^2 + y^2$$

eppure

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

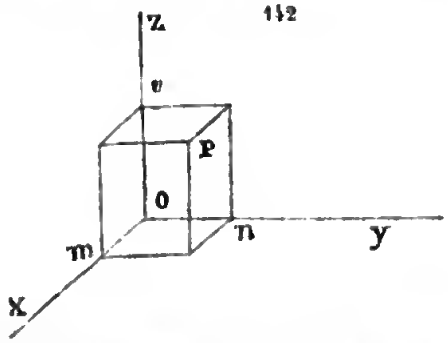
La linea Op che passa per l'origine O e per il punto p fa con gli assi delle ascisse x e delle ordinate y respettivamente due angoli α e β tali che si ha

$$\text{Cos.}\,\alpha = \frac{x}{r},\quad \text{Cos.}\,\beta = \frac{y}{r}$$

Questi angoli fissano la posizione della linea Op che passa per l'origine.

Per fissare la posizione di un punto p nelle spazie, si suppongono condotti per O (fig. 142) tre assi ad angolo retto Ox, Oy, Oz; e le coordinate $Om = x$, $Om = y$, $Ov = z$ che sono respettivamente uguali alle distanze del punto p dai piani nei qua-

142



li giacciono gli assi coordinati determinano la posizione del punto p.

La distanza r dal punto p all'origine O è data da

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

oppure $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

La linea Op fa con gli assi coordinati gli angoli α, β, γ che sono dati da

$$\text{Cos.}\,\alpha = \frac{x}{r},\ \text{cos.}\,\beta = \frac{y}{r},\ \text{cos}\,\gamma = \frac{z}{r}$$

In una equazione per esempio $y = ax$ tra due coordinate, dando un valore arbitrario ad una di esse per esempio ad x

acquista l'altra un valore corrispondente, ed il punto determinato da queste due coordinate sodisfa alla equazione proposta. Dando ad x un numero qualunque di valori successivi, e determinando i valori corrispondenti di y, si avrà una serie di punti, i quali nel caso nostro saranno tutti situati sovra una retta, e formeranno in tal modo un sistema, nel quale le coordinate di ciascun punto sodisfano alla equazione proposta; questo sistema dicesi il *luogo geometrica* della equazione proposta. Viceversa dicesi che l'equazione $y = ax$ rappresenta una retta. Questa retta giace sul piano delle x, y; passa per l'origine, e fa con l'asse dell'x un angolo la cui tangente trigonometrica è a.

In generale $y = f(x)$ rappresenta una curva che giace sul piano delle due coordinate x, y.

Due equazioni fra tre coordinate rappresentano una curva esistente nello spazio e riferita a tre assi così le equazioni $y = ax$, $z = a'x$ rappresentano una retta che passa per l'origine la cui proiezione sul piano delle x, y fa con l'asse delle x un angolo la cui tangente trigonometrica è a, mentre la proiezione di questa retta sul piano delle x, z fa con l'asse delle x un angolo la cui tangente trigonometrica è a'.

Le equazioni

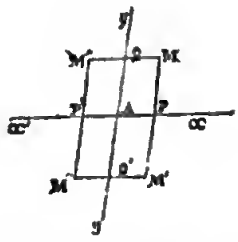
$$y = a\,x\,,\quad z = a'\,,\,x$$

considerate separatamente rappresentano la prima un piano proiettante la retta perpendicolare al piano delle x, y, la seconda un piano proiettante la stessa retta perpendicolare al piano delle x, z. L'insieme di queste equazioni rappresenta l'incontro di questi due piani ossia la retta data.

Queste equazioni rappresentano al tempo stesso le proiezioni della retta data sui piani delle x, y e delle x, z.

COORDINATE OBLIQUE. In generale si possono condurre in un piano due assi fissi (fig. 143) e determinare il punto M per mezzo di coordinate parallele a questi assi. Bisogna in ogni caso osservare che riguardando come positive le ascisse contate nella direzione Ax e le ordinate contate nella direzione Ay; dovranno pure riguardarsi come negative le ascisse

143



nella direzione A x' e le ordinate nella direzione Ay'. Così se il punto M è

nell'ang. y Ax, l'ascissa è + l'ordinata +
nell'ang. y Ax' l'ascissa è — l'ordinata +
nell'ang. y' Ax l'ascissa è + l'ordinata —
nell'ang. y' Ax' l'ascissa è — l'ordinata —

Quando si cambia la posizione degli assi coordinati il grado della equazione non cambia, per cui questo grado è proprio a servir di base alla classificazione delle linee.

COORDINATE POLARI. Si adopra ancora un altro sistema di coordinate, il quale sebbene non possa servire alla classificazione delle linee, offre in certi casi vantaggi particolari.

Le coordinate di un punto M si stabiliscono prendendo (fig. 144) un punto P

144

fisso che dicesi polo, conducendo un *asse* Pz, e determinando il raggio vettore PM $= \rho$ ossia la distanza dal polo al punto M, e l'angolo MP$z = \omega$ che il raggio vettore ρ fa con l'asse Pz. Un'equazione a due variabili fra coordinate rettilinee x ed y si trasforma in una altra a coordinate polari ρ ed ω adoprando le formule

$$x = a + \rho\ \text{sen.}\ \frac{(\theta - \alpha + \omega)}{\text{sen.}\ \theta}$$

$$y = b - \rho\ \text{sen.}\ \frac{(\alpha + \omega)}{\text{sen.}\ \theta}$$

dove a e b sono le coordinate rettilinee del polo, θ l'angolo che fanno tra loro gli

assi di queste coordinate supposte oblique, ed α l'angolo che l'asse polare fa coll'asse delle x.

Nel modo stesso si può passare alle coordinate rettilinee dalle coordinate polari adoprando le formule

$$\rho = \sqrt{(x-a)^2 + (x-a)(y-b)\cos.\theta + (y-b)^2}$$

$$\text{Tang. } \omega = -\frac{(x-a) + (y-b)(\text{sen. } \theta - \cos.\theta \text{ tang. } \alpha)}{(x-a) + (y-b)(\cos. \theta - \text{sen. } \theta \text{ tang. } \alpha)}$$

EQUAZIONI DEL PRIMO E DEL SECONDO GRADO TRA LE COORDINATE RETTILINEE. In generale la discussione delle equazioni che rappresentano le rette e le curve, conduce alla dimostrazione di tutte le proprietà geometriche delle figure che queste equazioni rappresentano.

E reciprocamente la cognizione delle proprietà delle linee o di un numero di elementi sufficiente, serve a trovare le equazioni di queste linee.

Per esempio la linea retta che ha per equazione

$$y = ax + b$$

supposto θ l'angolo che fanno tra loro gli assi delle coordinate, incontrerà l'asse delle ascisse sotto un angolo α determinato dalla formula

$$\text{tang. } \alpha = \frac{a \text{ sen. } \theta}{1 + a\cos.\theta}$$

e reciprocamente l'equazione della linea retta che fa un angolo α coll'asse delle x, e che all'origine ha per coordinata b è

$$y = \frac{\text{sen. } \alpha}{\text{sen. } (\theta - \alpha)} x + b$$

Si troverebbe nel modo stesso l'equazione di una retta che passa per due punti dati; o quella di una retta che passando per un punto dato, è parallela o perpendicolare ad un altra retta data, o fa con questa un dato angolo; si potrebbero determinare le coordinate del punto d'intersezione di due rette, la distanza di due punti ec.

L'equazione generale del secondo grado a due variabili

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

rappresenta un'ellisse, una iperbola o una parabola secondo che $B^2 - 4AC$ è negativo o positivo o nullo.

Nei primi due casi è sempre possibile trasportando gli assi parallelamente a loro stessi, trovare una trasformata nella quale spariscono i termini di primo grado. L'origine delle coordinate passa allora in un punto che dicesi il centro della curva.

È sempre possibile per una qualunque delle tre curve, trovare due assi ad angolo retto tali che ponendo questi per assi delle coordinate il termine che contiene il rettangolo delle variabili sparisca. E nel caso della parabola il termine che contiene il quadrato di una delle variabili sparisce nel tempo stesso del rettangolo.

L'equazione generale può dunque essere ricondotta ad una delle tre forme seguenti

$$y^2 + m^2x^2 = p \text{ (ellisse)}$$

$$y^2 - m^2x = p \text{ (iperbola)}$$

$$y^2 = 2px \text{ (parabola)}$$

Le due prime equazioni si possono porre sotto forma simmetrica

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

dove $2a$ e $2b$ rappresentano il grande asse e il piccolo asse dell'ellisse nella 1ª; e $2a$ l'asse traverso, $2b$ il secondo asse della iperbola. Queste due curve hanno allora come assi delle coordinate i loro assi principali.

I loro fuochi sono situati sull'asse delle x, ad una distanza dal centro uguale a

$$\sqrt{a^2 - b^2}$$

per l'ellisse, ed a

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

per l'iperbola.

Il parametro ossia la doppia ordinata che passa per il fuoco ha per valore

$$\frac{2b^2}{a}$$

nell'ellisse e nell'iperbola; nella parabola ha per valore $2p$.

L'equazione di queste tre curve per coordinate polari è

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos. \omega} ;$$

dove p rappresenta il semi parametro, e un'numero che è minore o maggiore o uguale all'unità, secondo che la curva è un'ellisse, una iperbola o una parabola. L'origine delle coordinate polari è uno dei fuochi, l'asse dei fuochi è preso per asse polare.

Il cerchio è un caso particolare della ellisse: la sua equazione, quando è riferita a due assi rettangoli che passano per il suo centro è

$$x^2 + y^2 = r^2$$

dove r designa il raggio.

Queste diverse equazioni delle linee di secondo ordine racchiudono implicitamente tutte le proprietà che abbiamo enunciato su queste linee, o molte altre alle quali non si giunge che per una via più difficile adoprando la sintesi degli antichi.

DEI PUNTI, DELLE LINEE E DELLE SUPERFICIE NELLO SPAZIO. La posizione di un punto nello spazio si determina per mezzo delle sue tre coordinate x, y, z, cioè per mezzo di tre retto condotte ciascuna per questo punto parallela ai tre assi delle coordinate, sino all'incontro dei tre piani che si tagliano secondo questi assi. V. pag 154.

Ogni equazione a tre variabili rappresenta una superficie nello spazio.

Per determinare una linea sono necessarie due superficie che si incontrano, ossia due equazioni a tre variabili, o talora a due.

Una equazione a due variabili rappresenta una superficie cilindrica la cui generatrice è parallela all'asse di quella coordinata che manca. V. loc. cit.

Ogni equazione di primo grado a due o tre variabili rappresenta un piano. Se essa è completa si pone sotto la forma semplicissima

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

nella quale a, b, c sono le coordinate all'origine, cioè le porzioni degli assi compresi tra l'origine ed il piano; a sull'asse delle x, b sull'asse delle y, c sull'asse dello z.

Si può eliminare tra due equazioni e tre variabili una variabile qualunque; per conseguenza si può sostituire a due equazioni a tre variabili che rappresentano una linea due altre equazioni a due variabili soltanto.

Così alle due equazioni complete, che rappresentano due piani la cui intersezione è una linea retta, si sostituiranno le equazioni

$$x = az + b, \quad y = pz + q$$

l'insieme delle quali rappresenta una linea qualunque.

La trasformazione delle coordinate nello spazio si opera per mezzo di formule di primo grado della forma

$$\begin{aligned} x &= \alpha + a\ x' + b\ y' + c\ z' \\ y &= \beta + a'\ x' + b'\ y' + c'\ z' \\ z &= \gamma + a''\ x' + b''\ y' + c''\ z' \end{aligned}$$

e il grado delle equazioni non cangia, quando si operano delle trasformazioni qualunque degli assi delle coordinate nello spazio.

Per cui è naturale di dividere le superfici algebriche in differenti ordini secondo il grado delle loro equazioni.

Una superficie del grado m non può essere tagliata da un piano secondo una linea di un grado superiore ad m, nè può essere incontrata da una linea retta in più di m punti.

SUPERFICI DEL SECONDO GRADO. L'equazione generale del secondo grado a tre variabili può sempre con una scelta conveniente degli assi delle coordinate ricondursi alla forma

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = II \ldots . \qquad (a)$$

o all'altra

$$P'y^2 + P''z^2 = 2Qx \ldots . \qquad (b)$$

La prima rappresenta le superfici che hanno un centro, l'altra quelle che non lo hanno.

Nella equazione (*a*) si possono sempre supporre positivi P e P′ nel primo membro, cambiando opportunamente i segni; ed allora non si hanno da considerare che tre casi distinti, i quali corrispondono 1° a $+ P'$ e $+ H$, 2° a $- P'$ e $+ H$, 3° a $- P'$ e $- H$.

Nel primo caso l'equazione si conduce alla forma

$$(4)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

la quale rappresenta un ellissoide superficie limitata in tutti i sensi, che segata da un piano da sempre per sezione un ellisse.

Nel caso particolare a cui $a^2 = b^2 = c^2$ l'equazione diviene

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

e rappresenta una sfera di raggio uguale ad a. Avendosi $- P'$ e $+ H$ l'equazione prende la forma

$$(2)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

che rappresenta l'*iperboloide a una falda*.

Le sezioni parallele al piano delle xy sono ellissi le quali aumentano con la loro distanza da questo piano. Le sezioni parallele ai piani delle xz e delle yz sono delle iperbole, le quali divengono talora due rette che fanno due angoli opposti al vertice, quindi cambia la direzione degli assi; divenendo traverso il secondo.

Quando si ha $- P'$ e $- H$ l'equazione si riconduce alla forma

$$(3)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

che rappresenta l'iperboloide a due falde.

Il piano delle xy non incontra la superficie: gli altri due piani coordinati la tagliano secondo delle iperbole similmente disposte. Le sezioni parallele al piano delle xy cominciano a partire da una certa distanza da questo piano, e sono delle ellissi che vanno crescendo da zero all'infinito.

Le superficie le quali non hanno centro, rappresentate dalla equazione (*b*) si riducono a due, secondo che questa equazione ha tutti i termini positivi, o il solo P′ negativo.

Nel primo caso l'equazione si può mettere sotto la forma.

$$(4)\quad \frac{y^2}{q} + \frac{z^2}{q'} = 2x$$

la quale rappresenta la paraboloide ellittica.

Tutte le sezioni parallele ai piani delle xy e delle xz sono parabole respettivamente uguali alle sezioni fatte da questi due piani stessi; e tutte le sezioni fatte parallelamente al piano delle yz sono ellissi che vanno aumentando da un punto all'infinito.

L'ultima equazione che diviene

$$(5)\quad \frac{y^2}{q} - \frac{z^2}{q'} = 2x$$

rappresenta la *paraboloide iperbolica* la più singolare tra le superficie di secondo grado.

Essa è tagliata dal piano delle yz secondo due rette che si incontrano all'origine delle coordinate; dal piano delle xy secondo una parabola voltata dal lato delle x positivo; dal piano delle xz secondo una parabola voltata dalla parte delle x negative. Tutte le sezioni parallele al piano delle yz sono iperbole che hanno il centro sull'asse delle x, ed hanno l'asse traverso da una parte del piano yz parallelo alle z, dalla parte opposta di questo piano parallelo alle y. Gli asintoti di queste iperbole sono paralleli alle rette secondo le quali il piano yz incontra la superficie.

Le sezioni parallele al piano delle xy sono parabole uguali a quella determinata da questo piano sulla superficie; cosicchè questa può essere generata da una parabola che si muove parallelamente a sestessa appoggiando sempre il suo vertice sopra una parabola data.

Se nella equazione (*a*) si suppone H nullo si dovranno esaminare i due casi

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 0$$

$$Px^2 + P'y^2 = P''z^2 = 0$$

la prima equazione rappresenta un punto unico all'origine, la seconda un cono che ha il suo vertice all'origine.

Se nella equazione (*a*) si fa invece $P''=o$ allora si dovranno considerare le due equazioni

$$Px^2 + P'y^2 = H \qquad Px^2 - P'y^2 = H$$

La prima rappresenta un cilindro a base ellittica, una retta, o non rappresenta niente, secondo che H è positivo, nullo o negativo.

La seconda da un cilindro a base iperbolica se H non è nullo, e se H è zero da due piani.

Quando $P'=o$ e $P''=o$ l'equazione rappresenta due piani paralleli se H è positivo, un piano unico se $H = o$, e due piani immaginari se H è negativo.

Lasciando da parte i casi che rientrano nella equazione precedente l'equazione (*b*) non da che una nuova superficie, che è un cilindro a base parabolica, ed ha per equazione

$$P'y^2 = 2Qx.$$

Le superficie del secondo grado possono dunque ridursi a cinque generi distinti che comprendono come casi particolari i coni e i cilindri. E poichè ogni equazione di grado *m* comprende implicitamente i luoghi geometrici dei gradi inferiori, l'equazione del secondo grado può dare ancora due piani paralleli, un piano unico, una retta, un punto; essa può offrire anco casi di impossibilità, e non rappresentare alcun punto dello spazio.

Le superficie di secondo grado sono dotate di una quantità di proprietà curiose, molte delle quali sono analoghe a quelle delle linee del secondo ordine. Accenneremo tra queste solo le proprietà che hanno rapporto alla forma e al modo di generazione di queste superficie.

Le sezioni parallele di una superficie di secondo grado sono linee dello stesso grado simili e similmente disposte.

Tutte le superficie di secondo ordine, se si eccettua la sola paraboloide iperbolica, possono essere tagliate secondo dei cerchi, da piani paralleli condotti secondo due direzioni differenti.

Se due superficie di secondo grado si incontrano secondo una intersezione piana nell'ingresso, esse si incontreranno di nuovo secondo una sezione piana nell'uscita.

Tra le superficie di secondo ordine ve ne sono due, l'iperboloide a una falda, e la paraboloide iperbolica, che sono storte ed a generatrici rettilinee. Per ogni punto di queste due superficie si possono condurre due rette.

L'iperboloide ad una falda può essere generata da una retta che si muove lungo tre rette fisse non parallele ad uno stesso piano; e la paraboloide iperbolica può essere generata da una retta che si muove sopra tre rette fisse parallele ad uno stesso piano, oppure da una retta che si muove sopra due rette fisse restando parallela ad un piano dato.

§ 18. *Della istoria e dello studio della geometria.*

CENNO ISTORICO. Lo studio della geometria risale all'origine della società. Si assicura che nacque presso gli Egiziani che erano nella necessità di riconoscere e tracciare i limiti dei loro campi dopo ogni inondazione del Nilo.

Ma la considerazione delle verità astratte di geometria indipendentemente dalle loro applicazioni alle misure di lunghezza di superficie o di volume comincia solamente da Talete e da Pitagora.

Si racconta che Pitagora aveva promesso un centumbe a Giove, se giungeva a trovare la relazione che cercava tra i lati del triangolo rettangolo. Questa tradizione mostra con quai passione il genio dei Greci fosse unito alle sublimi speculazioni delle scienze astratte.

Tra i geometri greci bisogna citare Anassagora di Ciazomene; il divino Platone che chiamava Dio *l'eterno geometra*, e che aveva scritto sulla porta della sua scuola ciascuno entri se non è geometra; Euclide che raccolse ne' suoi elementi tutto quello che si conosceva ai suoi tempi; Apollonio di Perga autore di un bel trattato sulle sezioni coniche; Archimede il più illustre dei geometri dell'antichità; ed alcuni filosofi della scuola di Alessandria.

Il metodo delle coordinate e delle equazioni delle curve, pubblicato da Cartesio nella sua geometria, ha dato a questa scienza un impulso prodigioso ei tempi mo-

derni. Cavalieri, Fermat, Barrow, Pascal, Roberval, furono degni rivali di lui e prepararono la via a Newton e Leibnitz. Questi due scoprendo il calcolo infinitesimale quasi nel tempo istesso aprirono la strada a tutti i progressi dell'analisi moderna.

Tra i rami diversi della geometria teorica che sembrano degni di essere sviluppati, bisogna porre al primo posto quella che Leibnitz chiamava geometria di situazione; a questa sono da riferirsi i lavori di Vandermonde (V. le Memorie della antica Accademia di scienze) il quale verso la fine del secolo passato ha proposto una notazione semplice ed espressiva, adatta a definire chiaramente e rigorosamente le forme ed i movimenti i più complicati, come le diverse sinuosità della maglia di una calza, di una rete, con la quale trova la soluzione di un problema assai difficile sullo mosso del cavallo nelli scacchi. A queste idee bisogna riferire anco il bel lavoro di Poinsot sui poligoni stellati.

Nel modo stesso che il calcolo si applica alla geometria si può applicare la geometria al calcolo numerico. Cousinery ha pubblicato da non molto un opera intitolata: *Il calcolo fatto graficamente*, nella quale riunisce in un corpo di dottrina una série di considerazioni e di processi grafici relativi a questo soggetto.

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE. La geometria elementare è trattata in molte opere, destinate a diverse classi di studio. Gli elementi di Euclide hanno lungo tempo dominato nelle scuole. Gli elementi di geometria di Legendre presentano tutto il rigore delle dimostrazioni della geometria degli antichi e insieme notabili perfezionamenti; qualunque sia il metodo d'insegnamento adottato, questo libro sarà sempre a buon dritto stimato un capo d'opera.

La geometria di Lacroix presenta i principii di geometria sotto una forma meno severa e contiene alcune applicazioni. Le opere di Vincent Girodde ec. debbono essere raccomandate ai professori ed agli alunni. Tra gli autori che si sono occupati di applicazioni sono da citarsi principalmente Dupin, Bergery, Sonnet ec. Nella *nouvelle Geometrie* di questo ultimo si trovano quasi tutte le applicazioni indicate dagli altri precedentemente, i principii della geometria descrittiva, o in un piccolo altante separato dal libro, delle figure fatte con molta cura, delle quali abbiamo riprodotte alcune.

La geometria descrittiva è stata trattata da Monge creatore di questa scienza; le opere di Lefebure de Fourcy, Ollivier, Leroy sono da raccomandare per la chiarezza, o per la cura con cui sono eseguiti i disegni, l'ultima soprattutto è in tutto completa. A questa fa seguito un grosso volume che contiene le applicazioni della geometria descrittiva alla prospettiva, alle ombre, al taglio delle pietre, alle armature in legname.

La geometria analitica è stata trattata con successo da diversi autori o specialmente da Biot, Lacroix, Lefrancois, Lefebure de Fourcy ec.: Leroy ha pubblicato sotto il titolo di analisi applicata alla geometria a tre dimensioni un' opera nella quale sono esposti con molto ordine e chiarezza i metodi di Monge, di Poisson, di Binet e di altri scienziati.

La trigonometria si trova in molte delle opere che abbiamo citato precedentemente di Legendre, di Fourcy ec. La trigonometria pubblicata in italiano da Cagnoli e tradotta in francese da Chomprè è il più completo trattato che si conosca.

Un' opera eccellente sono gli elementi delle sezioni coniche di Mauduit. Le dimostrazioni sono sintetiche, e non esigono che si conosca la geometria analitica.

Non v' è ramo delle matematiche pure sul quale tanto sia stato scritto quanto sulla geometria. L' introduzione all' analisi degli infinitamente piccoli di Euler: l' introduzione all' analisi delle curve algebriche di Cramer, le opere di Archimede, di Apollonio, di Descartes, di Pascal, di Newton, di Leibnitz, dell' Hospital, di Huygens, di Bernoulli, di Lambert, di Monge ec. le collezioni accademiche debbono essere consultate da coloro che amano l' erudizione in geometria.

Mascheroni nella sua geometria del compasso, Carnot nella sua geometria di posizione, Poncelet nella sua opera *Propriètès projectives des figures*, Chasles, Lhuilier, Dupin e molti altri hanno singolarmente esteso dal principio di questo secolo in poi il dominio della speculazio-

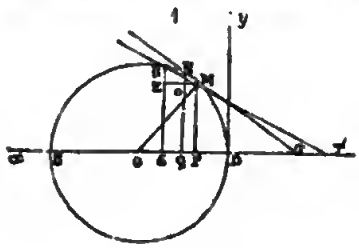
ni puramente geometriche. Gli annali di matematiche di Gergonne sono forse la raccolta scientifica più ricca in questo genere di produzioni. *Il giornale di matematiche* di Lieuville, quello di Crelle che si pubblica a Berlino, la *Corrispondenza fisica e matematica* di Quetelet pubblicato a Bruxelles, e le memorie delle diverse accademie racchiudono memorie importanti su tutti i rami di geometria.

IV. CALCOLO INFINITESIMALE

§ 1. *Principii generali del calcolo differenziale.*

ORIGINE DEL CALCOLO DIFFERENZIALE. Il calcolo infinitesimale deve la sua origine ad un problema di geometria.

Supponiamo che debba condursi una tangente MT al punto M della circonferenza MDB (fig. 1). Evidentemente ba-



sterà conoscere la sottangente PT, cioè la lunghezza dell'asse delle ascisse compresa tra il piede dell'ordinata MP e il punto T in cui la tangente incontra l'asse. Si consideri il cerchio come un poligono di un infinito numero di lati; sia MN uno di questi lati infinitamente piccoli: questo lato prolungato sino all'asse sarà evidentemente la tangente cercata, poichè non penetra nell'intorno del poligono.

Per tutti i punti della circonferenza si ha la relazione

$$MP^2 + CP^2 = CM^2$$

Designando il raggio CM con r, l'ordinata MP con y, l'ascissa DP con x, si avrà

$$y^2 + (r-x)^2 = r^2$$

$$o \quad y^2 = 2rx - x^2$$

che è l'equazione della circonferenza riferita agli assi Dx, Dy. In questa equazione passando dal punto M al punto N si avrà

$$(y + NO)^2 = 2r\,(x + MO) - (x + MO)^2$$

e togliendo da questa la precedente e cavandone il rapporto

$$\frac{MO}{NO} = \frac{2y + NO}{2r - 2x - MO}$$

ed osservando che i triangoli simili NOM ed MPT danno

$$\frac{MO}{NO} = \frac{PT}{MP}$$

da cui si ha

$$PT = \frac{MO}{NO}\,MP = \frac{(2y + NO)\,y}{2r - 2x - MO}$$

determineremo di qui il valore della sottangente PT, quando NO ed MO saranno conosciuti.

Ma poichè queste quantità sono infinitamente piccole come il latercolo MN, si potrà trascurare NO accrescimento infinitamente piccolo dell'ordinata in confronto alla quantità finita $2y$, e nel modo stesso MO accrescimento infinitamente piccolo dell'ascissa, in confronto della quantità finita $2r - 2x$, e si otterrà esattamente

$$PT = \frac{y^2}{r - x}$$

Le quantità infinitamente piccole che abbiamo trascurato, non conducono ad alcuna inesattezza sul risultato finale dal quale debbono disparire, perchè il ragionamento dal quale ci siamo partiti, riferendosi al latercolo MN, è tanto più rigoroso quanto il latercolo è più piccolo, ed acquista tutto il rigore geometrico quando MN, NO, MO divengono assolutamente trascurabili davanti ad y ed x che hanno un valore finito.

Per ciò che riguarda l'esempio precedente è facile assicurarsi *a posteriori* che si giungerebbe alla stessa espressione della sottangente PT, partendo dal noto principio che il triangolo CMT è rettangolo in M, e si decompone in due triangoli CMP, TMP simili tra loro e simili al primo.

DEFINIZIONI E NOTAZIONI FONDAMENTALI. Il calcolo differenziale ha per iscopo l'applicazione del calcolo algebrico alla considerazione dei rapporti di quantità infinitamente piccole, analoghe a quelle che si sono presentate nell'esempio precedente. Queste quantità si combinano e si trattano insieme alle quantità finite, per giungere alla determinazione di altre quantità simili che ne dipendono.

L'accrescimento infinitamente piccolo della variabile x si chiama il suo differenziale, ed è designato dal simbolo dx; mentre dy rappresenta l'accrescimento infinitamente piccolo, o il differenziale di y. Nell'esempio precedente si ha $MO = dx$ $NO = dy$. Il triangolo MNO si chiama *triangolo differenziale*.

Si vede che in generale la sottangente PT è uguale al prodotto dell'ordinata MP o y moltiplicata per il rapporto $\frac{dx}{dy}$, il quale deve dedursi dalla equazione della curva, operando sopra questa come nell'esempio precedente, e facendone infine sparire le quantità infinitamente piccole.

Se questa equazione è

$$y = f(x)$$

e si suppone che dando ad x un aumento infinitamente piccolo dx, y prenda un aumento corrispondente dy, si avrà

$$y + dy = f(x + dx)$$

togliendo la prima equazione dalla seconda, si ha

$$dy = f(x + dx) - f(x)$$

dove basta sviluppare il secondo membro per conoscere dy in funzione di dx, o viceversa.

Dividendo i due membri per dx si ha

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

questo $\frac{dy}{dx}$ si chiama il coefficiente differenziale della funzione y; il quale non è altro che il valore del rapporto tra il differenziale della funzione y e il differenziale della variabile indipendente x. E poichè il secondo membro della relazione precedente ha un valore verso il quale converge continuamente il rapporto

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

a misura che si danno ad h dei valori sempre più piccoli, si dice che il coefficiente differenziale è *il limite* del rapporto tra l'accrescimento della funzione e l'accrescimento della variabile indipendente.

Per ben intendere l'esistenza di questo limite basta riferirsi all'esempio esposto in principio. Difatto se invece della tangente MT si considera primieramente la secante RMT', la similitudine dei triangoli RMZ, MT'P conduce alla relazione

$$TP + T'T = MP\,\frac{MZ}{RZ}$$

si ha d'altronde dall'equazione del cerchio

$$\frac{MZ}{RZ} = \frac{2y + RZ}{2r - 2z - MZ}$$

nella quale RZ ed MZ saranno tanto più piccoli quanto più il punto R si ravvicina ad M. Cosicchè se si faccia girare la secante RMT' intorno ad M, in modo che essa si avvicini grado a grado alla tangente MT, diminuiranno al tempo stesso RZ ed MZ in modo che quando la secante sarà divenuta tangente essi saranno assolutamente nulli, e l'espressione precedente, che facendovi RZ ed MZ uguali a zero diviene $\frac{y}{r-x}$ sarà il limite del rapporto $\frac{MZ}{RZ}$ o il valore del coefficiente differenziale $\frac{dx}{dy}$. Si è visto nell'*algebra* (pag. 73) che la derivata $f'(x)$ di una funzione di x rappresentata da $f(x)$ è il coefficiente della prima potenza di h nello sviluppo $f(x+h)$. Questa derivata è essa pure il limite del rapporto

$$\frac{f(x + h) - fx}{h}.$$

Ciò è lo stesso che dire questa derivata non è altro che il coefficiente differenziale, e che dal differenziale si passerà alla derivata sopprimendo il fattore dx, o viceversa dalla derivata al differenziale moltiplicando la derivata per dx.

DIFFERENZIAZIONE DELLE FUNZIONI SEMPLICI. Sotto qualunque aspetto si riguardi il simbolo $\frac{dy}{dx}$, è della più grande importanza trovare delle regole per la differenziazione di tutte le funzioni possibili.

La tavola sottoposta presenta un riassunto di queste regole.

	Valore della funzione y	*Valore del differenziale* dy.
FUNZIONI ALGEBRICHE.	$a + x$ . . .	dx
	$a - x$ . . .	$-dx$
	ax	$a\,dx$
	$\frac{a}{x}$	$-\frac{a\,dx}{x^2}$
	x^m	$mx^{m-1}dx$
FUNZIONI TRASCENDENTI.	a^x	a^x Log. nep. $a\,dx$
	Log. x	$M\frac{dx}{x}$
	Sen. x	Cos. $x\,dx$
	Cos. x	$-$ Sen. $x\,dx$
	Arc. sen. x . .	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
	Arc. cos. x . .	$-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Se nella espressione $y = x^m$ si fa $m = \frac{1}{2}$ onde $y = \sqrt{x}$ se ne deduce

$$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

I differenziali della funzione esponenziale a^x o della funzione logaritmica Log. x contengono due simboli Log nep. a ed M che devono essere spiegati.

Quando si cerca il limite verso il quale converge la serie

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1\,2\,3} + \frac{1}{1\,2\,3\,4} + \text{ec.}$$

limite al quale ci si accosta di mano in mano che si prende la somma di un maggior numero di termini della serie, si trova un numero compreso tra 2 e 3 il cui valore approssimato sino alla decima decimale è

$$e = 2,7182818283.$$

Questo numero usato così spesso nell'analisi matematica, è quello che Nepero preso per base del suo sistema di logaritmi. *Log nep.* a indica il logaritmo di a nel sistema neperiano, e si scrive ordinariamente sotto la forma la.

M rappresenta il logaritmo del numero e preso nel sistema che a per base a.

Si ha sempre la relazione

$$\text{Log. } e = \frac{1}{\text{la}} \text{ o la} = \frac{1}{\log e}$$

Nel sistema ordinario di logaritmi in cui la base è $a = 10$ abbiamo

$$M = \log e = 0,4342944819$$

e reciprocamente

$$\text{Log nep. } 10 = 2,3025850930$$

DIFFERENZIAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE. Sia z una funzione di funzione di x, determinata dalle equazioni

$$z = F(y)\ y = f(x)$$

il differenziale di z preso per rapporto alla variabile x sarà dato dalla formula

$$dz = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}dx.$$

Nel modo stesso se si avesse

$$u = F(z),\ z = f(y),\ y = \varphi(x)$$

si troverebbe

$$du = \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}dx$$

per cui non dobbiamo che cercare tanti coefficienti differenziali semplici quante sono le funzioni.

Si abbiano le funzioni composte della forma

1° $u = x \pm y \pm z \pm t \pm$ ec.

e si otterrà

$$du = dx \pm dy \pm dz \pm dt \pm \text{ec.}$$

2° $u = xyzt\ldots$ si otterrà

$$du = yztdx + xztdy + xytdz + \text{ec.}$$

3° $u = \frac{z}{y}$ si otterrà $du = \frac{ydz - zdy}{y^2}$.

4° $u = y^z$ si otterrà

$$du = y^{z-1}(zdy + y\ly dz)$$

dove ly designa il logaritmo neperiano di y.

In generale per differenziare una funzione composta qualunque, basta differenziarla successivamente per rapporto a ciascuna delle funzioni dalle quali dipende, come se le altre fossero costanti, e fare la somma dei differenziali ottenuti.

Esempi:

1° $y = \text{taog. } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos. } x}$

$$dy = \left(1 + \text{tang.}^2 x\right) dx$$

2° $y = \text{cot. } x = \frac{\text{cos. } x}{\text{sen. } x}$

$$dy = -\left(1 + \text{cot. } x^2\right) dx$$

3° $y = \text{arc tang. } x$, da cui $x = \frac{\text{sen } y}{\text{cos. } y}$

$$dy = \frac{dx}{1 + x^2}$$

4° $y = \text{arc cot. } x$ da cui $x = \frac{\text{cos. } y}{\text{sen. } y}$

$$dy = -\frac{dx}{1 + x^2}$$

In generale se si ha

$$u = f(y, z, t, v \ldots)$$

essendo y, z, t, v ec. delle funzioni di x si avrà

$$du = \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \frac{du}{dt} dt + \text{ec.}$$

dove $\frac{du}{dy} dy$, $\frac{du}{dz} dz$ si chiamano i differenziali parziali della funzione u, i quali si prendono separatamente per rapporto a ciascuna delle funzioni $y, z, t, v \ldots$ considerando le altre funzioni come costanti.

La formula è vera ancora quando tutte o parte delle varisbili $y, z, t, u, \ldots$ sono indipendenti: in questo caso però i simboli dy, dz, dt ec. rappresentano quantità costanti.

DIFFERENZIAZIONE DELLE FUNZIONI IMPLICITE. Quando si ha una relazione espressa dalla equazione

$$F(x, y) = 0$$

y è una funzione implicita di x; talchè per ottenere il valore di y dato per x bisognerebbe risolvere l'equazione proposta. Tuttavia per ottenere il differenziale di y per mezzo di quello di x non è necessaria la risoluzione; ma basta prendere i differenziali parziali della funzione F, per rapporto ad x, considerando y come costante, che indicheremo con $\frac{dF}{dx}$, e per rapporto ad y considerando x come costante, differenziale che indicheremo con $\frac{dF}{dy}$ e servirsi della formula

$$dy = \frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}} dx$$

In generale se n variabili $x, y, z, \ldots$ sono legate fra loro da m equazioni $u = 0$, $s = 0$, $w = 0$ si avranno nel tempo stesso le m equazioni differenziali $du = 0$, $ds = 0$, $dw = 0$, per mezzo delle quali si potranno determinare i differenziali di m variabili, considerandole come funzioni implicite delle altre.

DIFFERENZIALI SUCCESSIVI. Il differenziale e la derivata di una funzione di x sono nuove funzioni delle quali si può cercare il differenziale e la derivata. Così ci si trova condotti a considerare i differenziali e le derivate del secondo, del terzo ordine ec.

Il differenziale di dy si indica con d, dy o più brevemente con d^2y. I differenziali successivi si rappresentano in generale con

$$dy, d^2y, d^3y \ldots d^ny$$

E se le derivate successive di y si rappresentino con

$$y', y'', y''', \ldots y^{(n)}$$

si avrà

$$dy = y'dx, d^2y = y''dx^2 \ldots d^ny = y^{(n)}dx^n;$$

in generale si avrà l'espressione

$$d^n y = \frac{d^n y}{dx^n} dx^n$$

dove $\frac{d^n y}{dx^n}$ rappresenta il coefficiente differenziale o la derivata dell'ordine n^{esimo}.

Le differenziazioni successive non presentano nissuna dificoltà, operando sulle funzioni di una sola variabile.

Per una funzione z di due variabili indipendenti x ed y si ha la formula

$$d^2 z = \frac{d^2 z}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2 z}{dx\, dy} dx\, dy + \frac{d^2 z}{dy^2} dy^2$$

Il primo termine viene dal differenziare $\frac{dz}{dx}$ per rispetto ad x; l'ultimo dal differenziare $\frac{dz}{dy}$ per rispetto ad y; il termine medio è la somma dei due risultati uguali che si ottengono differenziando $\frac{dy}{dz}$ per rispetto ad y, e $\frac{dz}{dy}$ per rispetto ad x.

In generale se z è una funzione delle variabili indipendenti x, y, t, u, .., prendendo la formula

$$d^n z = \left(\frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy + \frac{dz}{dt} dt + \ldots\right)^n$$

sviluppando la n^{esima} potenza del polinomio, e sostituendo in questo sviluppo $d^n z$ a dz^n, otterremo il valore del differenziale $d^n z$.

Nel caso in cui la funzione z contiene delle variabili dipendenti, i differenziali di queste debbono essere considerati come variabili e la formula precedente non è più vera.

Ma è però facile ottenere anco i differenziali dei diversi ordini delle funzioni implicite: avendo riguardo alla distinzione da stabilirsi tra i differenziali delle variabili indipendenti e quelli delle variabili dipendenti.

§ 2. *Applicazione del calcolo differenziale all' analisi algebrica.*

VALORI DELLE ESPRESSIONI CHE SI PRESENTANO SOTTO FORME INDETERMINATE. Quando i due termini di una frazione $\frac{f(x)}{F(x)}$ divengono nulli al tempo stesso, nel dare ad x un valore determinato a la frazione si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$. Esiste allora un fattore comune ai due termini della frazione, il quale diviene zero quando si fa $x = a$. Questo fattore si fa sparire e si ottiene il vero valore della frazione, prendendo le derivate successive del numeratore e del denominatore, e sostituendovi a invece di x, tante volte quante sono necessarie perchè si arrivi a due derivate del medesimo ordine, le quali non spariscano contemporaneamente per questa sostituzione. Questa operazione da il vero valore della frazione proposta il quale potrà essere nullo, finito, o infinito.

Nel modo stesso si toglie la indeterminazione del simbolo $\frac{\infty}{\infty}$ quando i due termini della frazione proposta divengono infiniti al tempo stesso.

Si riconducono alla regola precedente i casi nei quali la indeterminazione si presenta sotto le forma

$$0^0,\ \infty^0,\ 0^\infty.$$

MASSIMI E MINIMI DELLE FUNZIONI. Sia $y = f(x)$ una funzione di una sola variabile. La relazione

$$\frac{du}{dx} = 0$$

da i valori di x ai quali corrisponde un *massimo* o un *minimo*. Se $x = a$ è uno di questi valori, corrisponderà ad un massimo quando il primo coefficiente differenziale di posto pari che non sia a zero è negativo; e corrisponderà ad un minimo quando questo coefficiente è positivo. Se il primo coefficiente differenziale che non va a zero fosse di posto dispari non vi sarebbe nè massimo nè minimo.

Queste proprietà sono state indicate sotto una forma differente. (V. algebra pag. 74).

Le api nella costruzione dei loro alveari ci offrono un esempio singolare della

soluzione di un problema di *minimi*. Gli alveoli o cellule di questi insetti hanno come è noto la forma generale di un prisma exaedro regolare, in modo che primieramente non resta alcun vuoto tra le pareti degli alveoli come apparisce dalla fig. 58 pag. 105. Di più gli alveari sono composti di due file di alveoli disposti gli uni addosso agli altri, in modo che l' asse di quelli che hanno il loro orifizio da un lato è sul prolungamento della costola comune a tre alveoli contigui dall' altro lato opposto. Ma queste due file di cellule non sono separate d'un diaframma piano; ciascuno dei prismi esaedri regolari è terminato in una cuspide a tre faccie, che sono tre losanghe uguali ed ugualmente inclinate che hanno il vertice comune sull'asse del prisma, e per diagonale più lunga il lato del triangolo equilatero iscritto nell'esagono che serve di base al prisma. L'angolo al vertice di queste losanghe è di 109,° 28′ e l'altro angolo di 70° 32′ in circa.

Ora il volume dell'alveolo non cambia sostituendo questa cuspide triedra alla base esagona, cambia però la superficie, e vi è una forma di losanghe per la quale questa superficie è un minimo, per la quale in conseguenza la cera è adoperata a formare le pareti nel modo il più economico possibile. Ora è ammirabile che le api abbiano raggiunto appunto questo minimo; poichè cercando col calcolo gli angoli della losanga che sodisfano a questa condizione si trova che la tangente della metà di uno di questi angoli ha per valore $\sqrt{2}$. Perciò quest'angolo è di 109°, 28′ 16″, ed il supplemento di 70°, 31′, 44″. Si veggano per più ampio dettaglio gli Annali di scienze naturali t. XIII.

Nel caso di una funzione di due variabili,

$$z = f(x, y)$$

è necessario che si abbia al tempo stesso

$$\frac{dz}{dx} = o \text{ o } \frac{dz}{dy} = o$$

e che le derivate

$$\frac{d^2z}{dx^2} \text{ e } \frac{d^2y}{dy^2}$$

sieno dello stesso segno e sodisfacciano alla relazione di disuguaglianza

$$\frac{d^2z}{dx^2}\,\frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 > o$$

quando queste condizioni sono sodisfatte han luogo

1° Il massimo se $\dfrac{d^2z}{dx^2} < o$

2° Il minimo se $\dfrac{d^2z}{dx^2} > o$

In generale per una funzione u di un numero qualunque di variabili $x, y, z, t \ldots$ bisogna che si abbia separatamente

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0 \text{ ec.}$$

i valori di $x, y, z \ldots$ cavati da queste equazioni corrispondono ad un massimo o ad un minimo, secondo che i coefficienti differenziali

$$\frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dy^2}, \frac{d^2u}{dz^2},$$

corrispondenti a questi valori sono tutti negativi, o tutti positivi.

È necessario di più sodisfare ad altre condizioni troppo complicate per aver luogo in questa pubblicazione.

SERIE DI TAYLOR E DI MACLAURIN. La prima di queste serie dà lo sviluppo secondo le potenze ascendenti di h del risultato $f(x+h)$ il quale si ottiene sostituendo $x+h$ invece di x nella funzione $y = f(x)$. Questa formula è

$$f(x+h) = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1\,2} +$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{d^ny}{dx^n}\frac{h^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

L' abbiamo già presentata sotto un altra forma (V. algebra pag. 71).

L' altra serie che porta il nome di Maclaurin, e sembra dovuta a Stirling è

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots$$

$$+ \frac{x^n}{1\,2\,3\ldots n} f^{(n)}(0) + \ldots$$

in questa

$$f(0),\ f'(0),\ f''(0),\ \ldots\ f^{(n)}(0)$$

sono i valori che prendono la funzione y ed i coefficienti differenziali successivi della serie precedente

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots\ \frac{d^ny}{dx^n},$$

ponendovi $x = 0$; e può essere dedotta facilmente da quella.

La formula di Stirling è utilissima per sviluppare le funzioni di una sola variabile secondo le potenze ascendenti di questa variabile. Noi troveremo facilmente per mezzo di questa il sviluppi seguenti.

$$a^x = 1 + \frac{x}{1} la + \frac{x^2}{1.2} l^2 a + \text{ec.}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\text{Sen. } x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \text{ ec.}$$

$$\text{Cos. } x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \text{ ec.}$$

Dalla formula di Taylor si caverà

$$\text{Log. } (1 \pm x)$$

$$= M\left(\pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots\right)$$

serie che è convergente quando $x < 1$.

Ma la serie

$$\text{Log. } (1 + y) = \text{Log } y$$

$$+ 2M\left(\frac{1}{1+2y} + \frac{1}{3(1+2y)^3} + \frac{1}{5(1+2y)^5} + \ldots\ldots\right)$$

è convergentissima qualunque sia y.

M è il modulo ossia il valore dell' unità divisa per il logaritmo neperiano della base del sistema. Per i logaritmi ordinari si ha

$$M = 0{,}4342945.$$

FORMULE DI LAGRANGE E DI LAPLACE. Lagrange ha trovato per induzione una bella formula, per mezzo della quale si ottiene lo sviluppo di una funzione qualunque di y, che rappresenteremo con $\psi(y)$, quando y è determinato dalla relazione

$$y = a + \varphi(y)$$

questa formula è

$$\psi y = \psi(a) + \psi'(a)\varphi(a)$$

$$+ \frac{1}{1.2} \frac{d.\psi'(a)\varphi(a)^2}{da}$$

$$+ \frac{1}{1.2.3} \frac{d^2\psi'(a)\varphi(a)^3}{da^2} + \ldots$$

Essa è di una grandissima utilità per risolvere il famoso problema del *ritorno delle serie*, il quale ha per iscopo, dato uno sviluppo di z in funzione di y

$$z = \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \text{ec.}$$

trovare la forma dello sviluppo di y in z, o più generalmente di y^n in z.

Ponendo $a = \frac{z}{\alpha}$

$$\text{e } \varphi(y) = -\frac{y^2}{\alpha}\left(\beta + \gamma y + \delta y^2 + \text{ec.}\right)$$

si ha dalla formula di Lagrange

$$y^n = a^n - \frac{n}{1.\alpha}\, a^{n+1}\left(\beta + \gamma\, a + \delta\, a^2 + \ldots\right)$$
$$+ \frac{n}{1.2\,\alpha^2}\,\frac{d\, a^{n+3}\left(\beta + \gamma\, a + \delta a^2 + \ldots\right)^2}{d\, a}$$
$$- \frac{n}{1.2.3\,\alpha^3}\,\frac{d^2\, a^{n+5}\left(\beta + \gamma\, a + \delta\, a^2 + \ldots\right)^3}{d\, a^2}$$
$$+ \text{ec.}$$

Nel caso di $n = 1$ si ottiene da questa formula facendo i calcoli indicati nel secondo membro l' altra

$$y = \frac{1}{\alpha}\, z - \frac{\beta}{\alpha^3}\, z^2 + \left(\frac{2\beta^2 - \alpha\gamma}{\alpha^5}\right) z^3 - \left(\frac{5\beta^3 - 5\,\alpha\beta\gamma + \alpha^2\,\delta}{\alpha^7}\right) z^4$$
$$+ \frac{14\beta^4 - 21\,\alpha\beta^2\gamma + 6\,\alpha^2\beta\delta + 3\,\alpha^2\gamma^2 - \alpha^3\varepsilon}{\alpha^9}\, z^5 \text{ ec.}$$

Filippo Rubbiani ha calcolato i coefficienti di questo sviluppo fino al nono termine.

Se lo sviluppo di z in y è limitato e non racchiude che m termini, le formule precedenti danno i valori della potenza n della più piccola radice dell' equazione generale algebrica del grado m, e danno questa stessa radice. Lagrange ha trovato li sviluppi anco di tutte le altre radici dell' equazione. Se dunque il problema generale della risoluzione delle equazioni algebriche non può considerarsi come risoluto, ciò dipende dalle espressioni di questi sviluppi le quali in generale non sono convergenti e dall'ignorarsi le condizioni di questa convergenza o piuttosto i mezzi di ottenerla.

Laplace cercando una dimostrazione diretta della formula di Lagrange, è giunto ad una formula più generale, per mezzo della quale si ottiene lo sviluppo di una funzione qualunque

$$u = \psi(y),$$

essendo y una variabile dipendente dalla variabile x per mezzo della equazione

$$y = F(a + x\,\varphi(y))$$

Le caratteristiche ψ, F e φ indicano funzioni qualunque di forma data.

Questa formula di Laplace è

$$u = U + z\,\frac{du}{da}\cdot\frac{x}{1} + \frac{d.\, z^2\frac{du}{da}}{da}\cdot\frac{x^2}{1.2} + \ldots$$
$$+ \frac{d^{n-1}\, z^n\,\frac{du}{da}}{da^{n-1}}\cdot\frac{x^n}{1.2\ldots n} + \text{ec.}$$

dove U indica ciò che diviene u quando $x = 0$ e z rappresenta per brevità $\psi(y)$. Quando nella equazione in y si fa $x = 0$ si ottiene

$$y = F\,a,\quad \frac{dy}{da} = F'\,a$$

valori che bisogna sostituire in z o $\varphi(y)$ e in $\frac{du}{da}$.

Nel caso particolare in cui

$$y = a + x\,\varphi(a)$$

la formula di Laplace non differisce da quella di Lagrange, se non in questo che il secondo termine è moltiplicato per x il terzo per x^2 il quarto x^3 e così seguitando. Basta dunque porre $x = 1$ per dedurne la formula di Lagrange.

§ 3. *Applicazioni del calcolo differenziale alla geometria.*

PROBLEMA GENERALE DELLE TANGENTI. Se una curva piana qualunque è rappresentata dalla equazione

$$y = f(x)$$

l'equazione della tangente alla curva condotta per il punto che ha per coordinate x', y' è

$$y - y' = \frac{dy}{dx}(x - x')$$

Se il punto dato (x', y') è sulla curva, si conosce immediatamente il valore $\frac{dy}{dx}$ e quindi la posizione della tangente.

Se il punto (x', y') è fuori della curva, si determinano le coordinate x'', y'' del punto di contatto per mezzo delle due equazioni.

$$y'' = f(x'')$$
$$y'' - y' = \frac{dy''}{dx''}\left(x'' - x'\right)$$

Se l'equazione della curva fosse della forma

$$f(x, y) = o$$

l'equazione della tangente si potrebbe scrivere

$$\frac{df}{dx}(x - x') + \frac{df}{dy}(y - y') = o$$

La equazione della curva differenziata da

$$\frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy = o$$

dove f designa per brevità la funzione $f(x, y)$. Per cui si passa dalla equazione differenziale della curva all'equazione della tangente, sostituendo ai differenziali dx e dy i fattori $x - x'$, $y - y'$.

L'equazione della normale o perpendicolare alla tangente è

$$\frac{df}{dy}(x - x') - \frac{df}{dx}(y - y') = o$$

Nella curva $y = f(x)$, la lunghezza della tangente e della normale, compresa tra il punto di contatto e l'asse delle x, o quella della sottangente e della sunnormale si hanno dalle formule

$$\text{Tang.} = y\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}$$

$$\text{Norm.} = y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$\text{Sottangente} = y\,\frac{dx}{dy}$$

$$\text{Sunnormale} = y\,\frac{dy}{dx}$$

queste diverse equazioni e relazioni danno la soluzione del *problema diretto* delle tangenti in tutta la sua generalità.

ASINTOTI. Gli asintoti non paralleli all'asse delle y possono considerarsi come tangenti nelle quali il punto di contatto è posto ad una distanza infinita da questo asse. Basta adunque per avere la loro equazione cercare ciò che diviene l'equazione della tangente ponendovi $x = \pm\infty$.

Gli asintoti non paralleli all'asse delle x si otterranno nel modo stesso ponendo $y = \pm\infty$.

Gli asintoti paralleli all'asse delle y, o perpendicolari all'asse delle x si hanno dalla relazione $\frac{dx}{dy} = 0$. I valori di x che si caveranno da questa equazione dovranno rendere y infinito.

Per ottenere gli asintoti perpendicolari all'asse delle y si cercano i valori di y che sodisfano all'equazione $\frac{dy}{dx} = 0$ e che corrispondono sulla curva ad un valore infinito di x.

PUNTI SINGOLARI. Alcuni punti delle curve presentano notevoli particolarità dipendenti o dalla natura stessa della curva o dalla posizione degli assi coordinati. Si distinguono col nome di *punti singolari* quelli che corrispondono a qualche particolarità della curva che verremo notando.

1° Se la funzione $f(x, y) = 0$ non diviene reale che per un numero limitato di valori di x, l'equazione $f(x, y) = 0$

non rappresenterà che un punto o dei *punti isolati*. L'equazione

$$x^2 + y^2 = 0$$

per esempio non rappresenta che un sol punto posto all'origine delle coordinate. L'equazione $f(x, y) = 0$ può rappresentare al tempo stesso uno o più punti isolati ed uno o più rami di curva, come accade nelle equazioni

$$y^2 = x^2 (x^2 - a^2)$$

ed $$ay^2 - x^3 + bx^2 = 0$$

2° Quando la funzione $f(x, y) = 0$ passa ad un tratto dal reale all'immaginario, o cambia bruscamente di valore, la linea si rompe in certi punti che si chiamano *punti di discontinuità* come accade nelle due curve logaritmiche

$$y = \frac{1}{\log. x}, \quad y = x \log. x$$

che hanno ciascuna un punto discontinuo all'origine delle coordinate.

3° Quando la funzione $f(x, y)$ resta continua, cioè tale che cresca o decresca insensibilmente quando si fa variare x di quantità piccolissima; ma al tempo stesso il coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$ cambi bruscamente di valore, i due rami della curva vengono a riunirsi in un punto dato in modo che le loro tangenti formano tra loro un angolo dato. Questo punto dicesi cuspide. Tale è il punto che corrisponde ad $x = 0$ nelle curve rappresentate dalle due equazioni

$$y = x \text{ arc tang. } \frac{1}{x}, \quad y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

4° Se i due rami di una stessa curva tornano indietro in un punto dato, in modo che abbiamo in questo punto una tangente comune, questo punto dicesi punto di regresso; il quale sarà di *prima specie* se la tangente passa tra i due rami della curva, e di *seconda specie* se la tangente lascia i due rami da una stessa parte.

5° Si chiamano *punti multipli* quelli ai quali almeno tre rami della curva fanno capo e si fermano, o due rami almeno si incontrano e proseguono oltre di esso punto.

Così la curva

$$y^2 = x^2 (1 - x^2)$$

è formata di due rami che si incrociano all'origine toccando le rette

$$y = + x, \quad y = - x$$

che fanno un angolo di 45° coll'asse delle y da parti opposte.

6° Un punto *di inflessione* è un punto in cui la tangente tocca e taglia la curva.

Ecco le regole per determinare i *punti singolari* delle sei specie precedenti.

Si conoscerà che un punto situato sulla curva data da

$$u = f(x, y) = 0$$

è un punto isolato, o discontinuo o una cuspide, o un punto di regresso, quando per le coordinate di questo punto si hanno le equazioni

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0$$

restando la funzione u ed i coefficienti differenziali finiti e continui in prossimità di questo.

I. Il punto (x', y') sarà un punto isolato, 1° se le ordinate che corrispondono ad $x' + h$ e ad $x' - h$ dedotte dalle equazione $u = 0$ sono ambedue immaginarie 2° se a questo punto la curva non ha tangente il che accade quando

$$\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2u}{dx^2}\,\frac{d^2u}{dy^2} < 0$$

senza che siano nulli

$$\frac{d^2u}{dy^2}, \quad \frac{du}{dx\,dy} \text{ o } \frac{d^2u}{dx^2}$$

II. Il punto (x', y') sarà un punto di discontinuità 1° se una sola delle ordinate corrispondenti alle ascisse $x' + h$ ed $x' - h$ diviene immaginaria 2° se la curva in questo punto ha una sola tangente, nel

qual caso le coordinate x', y' verificano la relazione

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

III. Il punto (x', y') sarà una cuspide 1° se a ciascuna delle ascisse $x' + h$ ed $x' - h$ corrisponde una sola ordinata poco differente da y', o se ad una sola ascissa corrispondono due ordinate poco differenti da y' 2° se la curva al punto x', y' ha due tangenti per cui è necessario che

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} > 0$$

IV. Il punto (x', y') diverrà un punto di regresso quando alla prima condizione che si esige per la cuspide, si aggiunga che le due tangenti divengano una sola, e ciò accade se

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} = 0$$

V. I rami della curva in numero n si riuniscono in un punto multiplo, quando le coordinate di questo verificano contemporaneamente $n-1$ serie di equazioni, che si ottengono uguagliando a zero i coefficienti differenziali del primo, del secondo, del $(n-1)^{esimo}$ ordine della funzione

$$u = f(x, y) = 0.$$

VI. Le coordinate di un punto di flesso debbono sempre sodisfare alla equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

CURVE OSCULATRICI E RAGGIO DI CURVATURA. L'angolo infinitamente piccolo formato da due elementi successivi di una curva considerata come un poligono di una infinità di lati chiamasi angolo di contingenza.

Il circolo che ha il suo centro all'incontro delle perpendicolari inalzate sul mezzo di questi elementi e che è tangente ad essi, chiamasi circolo osculatore, ed il suo raggio chiamasi raggio di *curvatura* della curva. La lunghezza assoluta di questo raggio è data dalla formula

$$\rho = \frac{\pm\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

le coordinate a e b del centro del circolo osculatore al punto (x, y) sono date dalle formule

$$a = x - \rho\frac{dy}{ds}, \quad b = y - \rho\frac{dx}{ds}$$

nelle quali si ha

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Il circolo osculatore ha un contatto con la curva che dicesi di secondo ordine.

In generale la curva $y = \varphi(x)$ ha con la curva $y = f(x)$ il contatto dell'ordine più elevato possibile nel punto (x', y'), quando i coefficienti differenziali tratti da queste equazioni, hanno per rapporto a questo punto (x', y') valori uguali respettivamente, fino all'ordine che uguaglia il numero dei coefficienti dell'equazione meno uno.

Questo contatto dicesi osculo e la curva $y = \varphi(x)$ dicesi osculatrice della curva $y = f(x)$.

Le n equazioni che si ottengono eguagliando così le ordinate $\varphi(x)$ e $f(x)$, e i loro $n-1$ primi coefficienti differenziali, servono a determinare gli n coefficienti arbitrarii della equazione $y = \varphi(x)$.

SVILUPPATA. Il centro di curvatura o del cerchio osculatore può considerarsi come il punto in cui si incontrano due normali infinitamente vicine.

Il luogo dove si incontrano successivamente tutte le normali ad una curva data determina una nuova curva, che dicesi sviluppata della prima, la quale prende allora il nome di sviluppante. Queste denominazioni dipendono dal considerare la prima generata sviluppando un filo che si suppone avvolto sulla seconda, poichè le normali a questa sono tutte tangenti a quella; e il filo supposto inestensibile resta di fatto normale alla sviluppante e tangente alla sviluppata

L'equazione della sviluppata $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ si ottiene eliminando x ed y tra le tre equazioni.

$$f(x, y) = 0$$
$$\alpha - x + (\beta - y)\frac{dy}{dx} = 0$$
$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} - (\beta - y)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Per quello che riguarda le superfici curve e le curve a doppia curvatura, i loro piani tangenti, le normali, i raggi di curvatura, le sviluppate, rimanderemo ai lavori speciali; citando soltanto le lezioni sul calcolo differenziale redatte dall'ab. Moigno secondo i metodi esposti nelle opere edite ed inedite di Cauchy. Da queste lezioni sono stati tratti i risultati della teoria dei punti singolari che fanno parte di questa pubblicazione.

§ 6. *Principii del calcolo integrale*.

OGGETTO E NOTAZIONE DI QUESTO CALCOLO. Il calcolo integrale ha per oggetto di insegnare a risalire dalle quantità differenziali alle quantità finite dalle quali provengono.

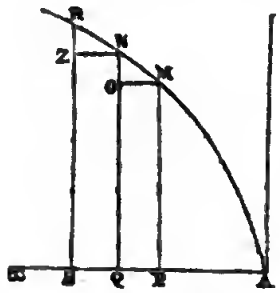
Così essendo $mx^{m-1}dx$ il differenziale di x^m, reciprocamente x^m è l'integrale di $mx^{m-1}dx$, e si esprime con la notazione

$$\int mx^{m-1}dx = x^m + C$$

il segno $\int$ (integrale e somma) indica la somma di una infinità di elementi infinitamente piccoli. Bisogna osservare che quando due quantità non differiscono tra loro che di una costante i loro differenziali sono uguali: e che in conseguenza ogni integrale deve essere aumentato di una costante C, che si determina quindi a seconda delle condizioni della questione.

Prendiamo un esempio tratto dalla geometria il quale faccia intendere meglio l'utilità di questo calcolo.

Sia AMNR (fig. 2) una curva della qua-



2

le si voglia determinare l'area; cioè la superficie compresa tra l'arco AM della curva, l'ascissa $AP = x$, e l'ordinata $MP = y$.

Se l'ascissa AP aumenta di una quantità infinitamente piccola $PQ = dx$, l'ordinata MP varia essa pure di $NO = dy$, il trapezio infinitamente piccolo MPQN sarà l'elemento differenziale della area della curva.

Questo trapezio ha per misura $\frac{1}{2}(2y + dy)\,dx$, o più semplicemente ydx, perchè a confronto di questa quantità si può trascurare $\frac{1}{2}dy\,dx$ che è un infinitamente piccolo di secondo ordine e corrispondo al triangolo MNO Componendosi l'area della curva di una infinità di trapezi come ydx, si otterrà quest'arco prendendo l'integrale

$$\int ydx + C = \text{area AMP}$$

Se la curva è una parabola che ha per equazione $y^2 = 2px$ si avrà da questa equazione $ydy = pdx$ da cui $dx = \frac{ydy}{p}$. Sostituendo questo valore di dx sotto il segno $\int$ avremo

$$\text{area AMP} = \int \frac{y^2 dy}{p} + C$$
$$= \frac{1}{3}\frac{y^3}{p} + C$$

come si potrebbe provare *a posteriori* differenziando

$$\frac{1}{3}\frac{y^3}{p}+C$$

Ponendo $2px$ in luogo di y^2 ed osservando che all'origine A delle coordinate l'area è nulla e che in conseguenza $C=0$ quando $y=0$, si ottiene finalmente

$$\text{Area AMP}=\frac{2}{3}xy.$$

Risultato già noto, che mostra che l'area del segmento parabolico è due terzi del rettangolo che ha la stessa base e la stessa altezza (pag. 123).

Regole fondamentali. Le regole del calcolo integrale derivano da quelle del calcolo differenziale.

Primieramente i segni d ed $\int$ relativi alla differenziazione ed alla integrazione si distruggono l'un l'altro, in modo che si ha

$$d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx$$

$$\int d\,\mathrm{F}(x)=\mathrm{F}(x)$$

Si può cavare di sotto al segno $\int$ la costante che moltiplica il differenziale e scrivere

$$\int \mathrm{A}\,f(x)\,dx=\mathrm{A}\int f(x)\,dx.$$

In generale avendosi

$$\int f(x)\,dx=\mathrm{F}(x)+\mathrm{C},$$

se si sa che l'integrale per un valore di $x=a$ deve prendere un valore determinato B si avrà $C=B-F(a)$, ed il valore dell'integrale sarà $F(x)-F(a)+B$.

Se l'integrale si vuole prendere da $x=a$ fino ad $x=b$ il suo valore sarà $F(b)-F(a)$ resultato il quale si esprime scrivendo

$$\int_a^b f(x)\,dx=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$$

che chiamasi un integrale definito preso tra a e b.

L'integrazione dei differenziali riportati qui sotto non offre nissuna difficoltà, e può essere verificata a *posteriori*.

1° Differenziali algebrici.	Integrali corrispondenti.
$x^n\,dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{dx}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\frac{dx}{x}$	lx

2° Differenziali esponenziali.	Integrali corrispondenti.
$e^x\,dx$	e^x
$a^x\,dx$	$\frac{a^x}{la}$

3° Differenziali delle funzioni circolari.	Integrali corrispondenti.
$\cos.x\,dx$	$\mathrm{sen.}\,x$
$\mathrm{sen.}\,x\,dx$	$-\cos.x$
$\frac{dx}{\cos.^2 x}$	$\mathrm{tang.}\,x$
$\frac{dx}{\mathrm{sen.}^2 x}$	$-\mathrm{cot.}\,x$
$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{arc.\,sen.}\,x$
$-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{arc.\,cos.}\,x$
$\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{arc.\,tang.}\,x$
$-\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{arc.\,cot.}\,x$

Queste formule sussistono anco quando invece di x si ha una funzione qualunque di x, ed invece di dx il differenziale di questa funzione.

L'integrale della somma di più funzioni differenziali è uguale alla somma degli integrali di queste funzioni.

Dalle formule conosciute

$$duv = udv + vdu$$

si deduce

$$uv = \int udv + \int vdu$$

oppure $$\int udv = uv - \int vdu$$

che serve all'integrazione per parti o che si adopra spessissimo nel calcolo integrale quando l'integrale di vdu si può trovare più facilmente che quello di udv.

INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI. Ciò che si è visto precedentemente basta per l'integrazione delle funzioni razionali intere. Per la integrazione di una frazione razionale $\frac{F(x)}{f(x)}$ ridotta alla sua più semplice espressione, da cui sia stata già tolta la parte intera bisognerà decomporre questa nei modi che appresso in frazioni parziali.

1° Se il denominatore $f(x)$ può decomporsi in fattori di primo grado tutti fra loro disuguali si trova

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \text{ec.}$$

e si otterranno i numeratori A, B, C ponendo successivamente $a, b, c \ldots$ invece di x nella frazione $\frac{Fx}{f(x)}$ che dà

$$\frac{Fx}{fx} = \frac{F(a)}{f'(a)(x-a)} + \frac{F(b)}{f'(b)(x-b)} + \text{ec.}$$

3° Se il fattore $x-a$ entra n volte in $f(x)$ si avrà $fx = (x-a)^n \psi(x)$ o si porrà

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A'}{(x-a)^{n-1}} \cdots + \frac{\rho(x)}{\psi(x)}$$

facendo per brevità

$$\varphi(x) = (x-a)^n \frac{F(x)}{f(x)}$$

avremo

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(a)}{(x-a)^n} + \frac{\varphi'(a)}{(x-a)^{n-1}} + \frac{\varphi''(a)}{1.2(x-a)^{n-2}} + \ldots + \frac{\varphi^{n-1}}{1.2..(n-1)(x-a)} + \frac{\rho(x)}{\psi(x)}$$

se i fattori $x-b$, $x-c$, entrassero più volte essi pure in $f(x)$; cosicchè si avesse $f(x) = (x-a)^n (x-b)^p \ldots (x-c)^q$ si potrebbe facilmente generalizzare lo sviluppo precedente, trasformando $\frac{\rho(x)}{\psi(x)}$ nel modo stesso che si è fatto di $\frac{F(x)}{f(x)}$.

3° Se nel denominatore $f(x)$ entra un fattore di secondo grado $(x-\alpha)^2 + \beta^2$, al quale corrispondono due radici immaginarie coniugate, si porrà

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Ax + B}{(x-\alpha)^2 + B^2} + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

e si determineranno A e B prendendo l'equazione

$$\frac{F(\alpha + \beta\sqrt{-1})}{\varphi(\alpha + \beta\sqrt{-1})} = A\alpha + B + A\beta\sqrt{-1}$$

la quale da due relazioni distinte eguagliando a zero separatamente la parte reale e la parte immaginaria.

4° Finalmente se il denominatore racchiude un fattore multiplo di secondo grado $\left((x-\alpha)^2 + \beta^2\right)^n$ si decompone $\frac{Fx}{f(x)}$ in una somma di frazioni parziali della forma

$$\frac{F(x)}{fx} = \frac{Ax + B}{\left((x-\alpha)^2 + \beta^2\right)^n} + \frac{A_1 x + B_1}{\left((x-\alpha)^2 + \beta^2\right)^{n-1}} + \text{ec.} + \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

Moltiplicando i due membri di questa equazione per $f(x)$ prendendo le derivate successive fino all'ordine $n-1$ ponendo quindi $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ si avrà un numero n di equazioni, ciascuna delle quali si decomporrà in due avende riguarde alla parte reale ed alla parte immaginaria, e così avremo $2n$ equazioni per determinare le $2n$ incognite (A, B), (A_1, B_1), ec.

La integrazione delle quattre specie di frazioni parziali, ottenute decomponendo una frazione razionale, conduce astrazione fatta dalla costante ai resultati seguenti.

I. $$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\,l(x-a).$$

II. $$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = \frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$$

III. $$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{2}A\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right) + \frac{A\alpha+B}{\beta}\ \text{arc. tang.}\ \frac{x-\alpha}{\beta}$$

IV. Ponendo $\frac{x-\alpha}{\beta} = z$ si avrà

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^n} = -\frac{A}{2(n-1)\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^{n-1}} + \frac{A\alpha+B}{\beta^{2n-1}}\int \frac{dz}{(1+z^2)^n}$$

$$\text{e} \int \frac{dz}{(1+z^2)^n} = \frac{z}{2(n-1)(1+z^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}}$$

così diminuendo successivamente di una unità l'esponente n si arriva all'integrale

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \text{arc tang. } z$$

INTEGRAZIONE DI ALCUNE FUNZIONI IRRAZIONALI. Una funzione differenziale la quale non racchiude altri radicali che della forma

$$\sqrt{a+bx\pm x^2}$$

può essere resa razionale, ed integrata coi processi precedenti. Se α ed α' indicano le radici reali della equazione $x^2 - bx - a = 0$ bisognerà porre uguale ad $(x-\alpha)z$ il radicale quando x^2 è affetto dal segno — oppure uguale a $z-x$ quando x^2 è affetto dal segno +. Poste queste relazioni se ne deduce x espresso per z e dx per dz e questa funzione di z prende forma razionale.

Il differenziale binomio

$$x^m dx\left(a+bx^n\right)^{\frac{p}{q}}$$

nel quale m ed n sono numeri qualunque può rendersi razionale in alcuni casi particolari, cioè

Quando $\frac{m+1}{n}$ sarà un numero intero e quando la somma delle frazioni $\frac{m+1}{n}$ e $\frac{p}{q}$ forma un numero intero. Nel primo caso si pone

$$a+bx^n = z^q$$

e nel secondo si pone

$$a+bx^n = z^q x^n.$$

Si può preparare il differenziale binomio in modo da rendere l'esponente n un numero intero e positive. L'integrazione per parti ci da allora delle formule per diminuire l'esponente m e l'esponente $\frac{p}{q}$ e ridurre il differenziale alla sua più semplice espressione.

INTEGRAZIONE PER SERIE. Quando non si può ottenere l'integrale esatto di un differenziale $f(x)\,dx$, si sviluppa $f(x)$ in serie convergente, e si integra quindi ciascuno termine dopo averlo moltiplicato per dx.

Questo processo può applicarsi al differenziale binomio precedente, quando non rientra nelle condizioni di integrabilità.

§ 5. *Applicazione del calcolo integrale alla geometria.*

RETTIFICAZIONE DELLE CURVE PIANE. La lunghezza dell'arco s di una curva piana riferita alle coordinate rettangolari ha per espressione generale

$$s = \int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

oppure $s = \int dy \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}$

si prenda per esempio la parabola $y^2 = 2px$ si avrà $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}$ da cui

$$s = \frac{1}{p} \int dy \sqrt{p^2 + y^2}$$

integrale che preso da $y=0$ ha per valore

$$s = \frac{y}{2p}\sqrt{p^2+y^2} + \frac{1}{2}\,p\,l\,\frac{1}{p}\left(y + \sqrt{p^2+y^2}\right)$$

che esprime la lunghezza dell'arco di parabola compreso tra il vertice ed il punto la cui ordinata è y.

Quando la curva è riferita alle coordinate polari r o t il differenziale dell'arco ha per espressione

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\,dt^2}$$

Nella spirale logaritmica che è una curva la quale ha per equazione $r = a^t$ si ha

$$dt = \frac{1}{la}\,\frac{dr}{r}$$

da cui $ds = \frac{dr}{la}\sqrt{1 + l^2\,a}$

Prendendo l'integrale del secondo membro tra i limiti r' ed r'' si ha

$$s = \frac{r'' - r'}{la}\sqrt{1 + l^2\,a}$$

QUADRATURA DELLE CURVE PIANE. Quando una curva piana è riferita a coordinate rettangolari, la parte dell'area compresa tra la curva, l'asse delle ascisse e due ordinate qualunque corrispondenti alle ascisse x' ed x'' ha per espressione

$$A = \int_{x'}^{x''} y\,dx$$

Per integrare questa espressione bisogna porvi il valore di y dato per x tratto dalla equazione della curva oppure il valore di dx dato per y o dy.

Se la curva è riferita alle coordinate polari r o t la porzione dell'area compresa tra i due raggi vettori r' ed r'' o la curva sarà espressa da

$$A = \frac{1}{2}\int r^2\,dt$$

Se si considera l'area della spirale logaritmica $r = a^t$, e si sostituisce nella formula il valore $dt = \frac{1}{la}\,\frac{dr}{r}$ si ottiene

$$A = \frac{1}{2la}\int_{r'}^{r''} r\,dr = \frac{1}{4la}\left(r''^2 - r'^2\right)$$

I principii del calcolo infinitesimale servono a dimostrare facilmente una bella proposizione della quale si servì Van-Heuraet per trovare nel 1659 la rettificazione della parabola cubica $ay^2 = x^3$, facendola dipendere dalla quadratura della parabola ordinaria. La proposizione è questa che se due curve sono tali, che per la stessa ascissa l'ordinata della seconda sia in un dato rapporto col quoziente della normale della prima per l'ordinata corrispondente, la lunghezza dell'arco della seconda sarà nello stesso rapporto con l'area del segmento della prima.

QUADRATURA DELLE SUPERFICIE E CUBATURA DEI SOLIDI DI RIVOLUZIONE. Sia A l'area descritta dall'arco s di una curva $y = f(x)$ che si rivolga intorno all'asse delle x; l'elemento differenziale dell'area della superficie è

$$dA = 2\pi y ds$$

essendo π il rapporto della circonferenza al diametro. Per integrare questo differenziale si caverà dalla equazione della curva y e ds dato per x e per dx, ovvero ds dato per y e per dy, in modo che non resti altro che a ricercare l'integrale di una espressione della forma $X\,dx$ o $Y\,dy$: essendo X una funzione della sola x o Y una funzione della sola y.

Nel modo stesso il differenziale, del volume V di un solido di rivoluzione, compreso tra la superficie e due piani perpendicolari all'asse delle x è

$$dU = \pi y^2 dx$$

Per integrare questa formula è necessario prepararla come la precedente.

Se un corpo è tagliato da due piani paralleli secondo delle sezioni l'area delle quali è funzione di una sola variabile il volume di questo corpo si può ottenere per mezzo di una sola integrazione come pei solidi di rivoluzione.

Così tagliando l'ellissoide che ha per equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

con un piano perpendicolare all'asse delle x, ed alla distanza x dell'origine; si ottiene per sezione un'ellisse l'area della quale ha per valore

$$\frac{\pi bc}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)$$

Il volume intero dell'ellissoide sarà dato dalla formula

$$V = \frac{\pi bc}{a^2}\int (a^2 - x^2)\,dx$$

Prendendo l'integrale tra i limiti $+a$ e $-a$ si ha $V = \frac{4}{3}\pi abc$; questo risultato comprende come caso particolare il volume della sfera $\frac{4}{3}\pi r^3$ quando si ha $a = b = c = r$.

QUADRATURA DELLE SUPERFICIE E CUBATURA DEI SOLIDI DI FORMA QUALUNQUE. L'espressione dell'area A di una superficie qualunque che ha per equazione $z = f(x, y)$ si ottiene per mezzo dell'integrale doppio

$$A = \int dx \int dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

dove p o q sono le derivate parziali di z prese rapporto ad x e ad y.

Si comincia da integrare per rapporto ad y cioè considerando y come sola variabile; quindi si moltiplica per dx il risultato di questa prima operazione e si integra di nuovo per rapporto ad x.

Quanto ai limiti tra i quali debbono essere presi gli integrali, dipendono dalla porzione di area sulla superficie che vuolsi considerare. Se trattasi per esempio della porzione compresa in un cilindro verticale che ha per equazione

$$F(x, y) = 0;$$

si caveranno da questa equazione i valori di y dati per x che sono i limiti variabili relativi alle sezioni parallele al piano delle xy fatte a distanza x dall'origine. Quando nel primo integrale ottenuto si sono sostituiti questi valori di y, si prende il secondo integrale tra i limiti costanti x' ed x'', che rappresentano il più grande ed il più piccolo valore di x in $F(x, y) = 0$. Questi nuovi limiti sono dati dalla equazione che si ottiene eliminando y tra

$$F(x, y) = 0 \text{ e } \frac{dF}{dx} = 0.$$

Il volume V di un corpo terminato da una superficie curva che ha per equazione $z = f(x, y)$, si ottiene per mezzo dell'integrale doppio

$$V = \int dx \int f(x, y)\,dy.$$

I limiti della integrazione si ottengono come per l'area della superficie curva.

Quando si vuole ottenere l'intero volume di un corpo terminato da una superficie chiusa che ha per equazione

$$\psi(x, y, z) = 0$$

le due falde estreme della superficie hanno per ordinate

$$z' = f(x, y) \text{ e } z'' = F(x, y)$$

l'elemento differenziale del volume è

$$(z' - z'')\, dx\, dy.$$

Si integrerà primieramente questo differenziale per rapporto ad y considerandovi x come costante, quindi si pone invece di y il suo valore dato per x e tratto dalla equazione finale, che risulta eliminando z tra le due equazioni

$$\frac{d\psi}{dz} = 0 \text{ e } \psi(x, y, z) = 0$$

Quindi si effettuerà la seconda integrazione per rapporto a dx tra i limiti dati dalla equazione che risulta eliminando y e z tra le equazioni

$$\psi(x, y, z) = 0, \frac{d\psi}{dz} = 0 \text{ e } \frac{d\psi}{dy} = 0.$$

Il metodo di Tomaso Simpson si applica alla rettificazione delle curve e alla quadratura delle superficie curve e nel tempo stesso alla quadratura delle aree piane o alla cubatura dei solidi.

Se vogliasi per esempio valutare un area piana compresa tra le ordinate y' ed y^n si prenda l'asse delle x perpendicolare a queste retto, quindi si conducano delle ordinate equidistanti

$$y', y'' \ldots - = y^{(n)},$$

in numero dispari; si avrà quest'area rappresentata prossimamente da

$$\frac{2}{3} h \left(\frac{y'}{2} + 2y'' + y''' + 2y^{IV} + y^{V} + \ldots \frac{y^{(n)}}{2} \right)$$

rappresentando con h la distanza delle ordinate.

§. 6 *Principii del calcolo delle differenze finite.*

CALCOLO DIRETTO DELLE DIFFERENZE. Quando una funzione u prende successivamente i valori $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n$, per gli accrescimenti successivi o finiti delle variabili dalle quali dipende, le differenze tra li stati consecutivi di questa funzione si chiamano differenze prime, e si rappresentano con la caratteristica Δ. Per cui si ha in generale

$$\Delta u_{n-1} = u_n - u_{n-1}$$

Le differenze tra le differenze prime consecutive si chiamano differenze seconde, e si rappresentano con Δ^2. Perciò si ha in generale

$$\Delta^2 u_{n-1} = \Delta u_n - \Delta u_{n-1}$$

E così continuando si possono considerare le differenze terze, quarte ec.

I valori u_n di uno delli stati della funzione u si ottengono facilmente, quando si conoscono le differenze degli ordini successivi ed un primo valore u_0 della funzione stessa, servendosi della formula simbolica

$$u_n = (1 + \Delta)^n u_0$$

nella quale gli esponenti di Δ dopo lo sviluppo indicano l'ordine della differenza di u invece di una potenza.

Nel modo stesso quando si conoscono li stati successivi pei quali passa la funzione u da u_m ad u_{m+n}, si può dedurre il valore della differenza dell'ordine n di u_m per mezzo della formula simbolica

$$\Delta^n u_m = (u - 1)^n u_m$$

cambiando nello sviluppo del secondo membro gli esponenti di u in indici.

La differenza finita di una funzione diviene il differenziale della medesima, quando gli accrescimenti delle variabili cessano di esser finiti e diveugono infinitamente piccoli.

CALCOLO INVERSO DELLE DIFFERENZE. Questo calcolo ha per iscopo di risalire dalle differenze alle funzioni primitive; l'operazione che conduce a questo resultato chiamasi integrazione a differenzo finite e si indica col segno Σ

Vi è una formula generale la quale riconduce l'integrazione di questo genere per rapporto alla funzione u a dipendere da un integrale ordinario, e dalle derivate successive della funzione u, questa formula è

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int u dx - \frac{1}{2}u + \frac{h}{1.2}\frac{du}{dx} - \frac{h^3}{720}\frac{d^3u}{dx^3} + \ldots$$

dove h designa l'accrescimento costante della variabile indipendente x.

SOMMA DELLE SERIE. Quando si conosce il termine generale u_n di una serie, si può calcolare per mezzo del calcolo in verso delle differenze l'integrale Σu_n il quale aumentato di una costante C da la somma di tutti i termini che precedono il termine u_n.

Applicando questa regola alla somma dei numeri poligoni e figurati si ritrovano le formule dell'algebra pag 62 o 63.

Alcuno di questo sono utilissimo per valutare il numero S di palle contenuto in un monte, nel quale sono disposte simmetricamente in modo che tutte le sfere eguali sieno tra loro tangenti.

Nel caso di uno strato triangolare il cui lato contenga n palle si dovrà prendere la formula

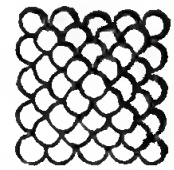
(1) . . $S = \frac{1}{2}n(n+1)$.

per uno strato quadrato si avrà

(2) . . . $S = n^2$

Se si abbia un monte che abbia la forma di un tetraedro regolare il cui lato contenga n palle si avrà

(3) . . . $S = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$.

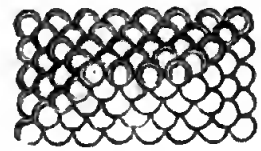


Se il monte sia invece una piramide a base quadrata il numero delle palle è

(4) . . . $S = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Se a questa piramide il cui lato contiene n palle, si aggiunga un prisma come nella figura, in modo che lo spigolo superiore contenga m palle si avrà

(5) . . . $S = \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{m+2(m+n-1)}{3}\right)$



La forma di questa espressione mostra che il numero totale delle palle, è uguale al numero di quelle contenute in una faccia triangolare, moltiplicato per il terzo della somma dei tre spigoli paralleli. In questa formula facendo $m = 1$ si ritrova la formula (4).

Il problema inverso nel quale ci si propone di trovare il numero di palle che debbono entrare nella base del monte, si

risolve facilmente. Questo numero è la radice del più gran quadrato contenute in 2S nella formula (1); quello del più gran cubo contenute in 6S nella formula (3) o quello del più gran cubo contenuto in 3S nella formula (4).

FORMULE DI INTERPOLAZIONE. Queste formule si adoprano per inserire tra i termini dati di una serie, nuovi termini sottoposti alla stessa legge dei primi.

Tra queste la più semplice è

$$u = u_0 + \frac{x}{h} \Delta u_0 + \frac{1}{2} \frac{x}{h} \left(\frac{x}{h} - 1 \right) \Delta^2 u_0 + \text{ec.}$$

la quale da tutti i valori di u successivi u_0, u_1, u_2 ponendovi invece di x i valori 0, h, $2h$ ec.

Perchè questa serie sia convergente bisogna che le differenze consecutive vanno diminuendo.

Quando conoscendo u ed u_0 si adopra questa serie per trovare il valore di x, essa da arrestandosi alla differenza seconda una equazione in x del seconde grado. Lagrange ha dato una formula di interpolazione per il caso in cui i valori: u_0, u_1, u_2, . . . u_n corrispondono ai valori di x_0, x_1, x_2 . . . x_n non equidistanti della variabile indipendente x.

Questa formula è

$$u = X_0 u_0 + X_1 u_1 + X_2 u_2 + \text{ec.}$$

nella quale le quantità X_0, X_1, X_2, sono date dalla formula generale

$$X_m = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{(x_m - x_0)(x_m - x_1)(x_m - x_2) \ldots (x_m - x_n)}$$

nella quale bisogna sopprimere nel numeratore e nel denominatore il fattore che ne ha m avanti di se.

§ 7. *Particolari istorici e bibliografici.*

Il primo saggio di calcolo differenziale è stato pubblicato da Leibnitz negli Atti di Lipsia del mese di ottobre 1684. La memoria nella quale è consegnata questa ammirabile scoperta è intitolata; *Nova methodus pro maximis et minimis; itemque tangentibus, quæ nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*. I primi principii del calcolo integrale apparvero qualche tempo dopo in uno scritto intitolato: *De Geometria recondita et analysi indivisibilium: atque infinitorum*. Fu soltanto sul finire dell'anno 1686 che Newton diede alla luce il suo libro immortale *Philosophiæ naturalis principia mathematica* nel quale è esposto il calcolo delle fluzioni, il quale aveva inventato probabilmente da molti anni. Questo calcolo analogo del tutto al calcolo differenziale, è inferiore ad esso per rapporto alle notazioni; per cui i lavori dei geometri del continente, dei Bernoulli, dell' Hospital, ec. . . si esercitarono soltanto attorno al metodo di Leibnitz.

Alcuni anni più tardi, quando per mezzo di questo potente istrumento si vide arricchita la scienza di un numero prodigioso di grandi scoperte, sorse la questione di priorità tra Leibnitz e Newton. E il principio del secolo decimo ottavo offrì lo spettacolo deplorabile di una polemica animata tra due dei più grandi genii dei tempi moderni.

Si può, dice Lagrange, considerare Fermat come il primo inventore del nuovo calcolo. I lavori di Cartesio, di Pascal, di Fermat, di Huygens, di Barrow, di Roberval, di Wallis, e quelli di Newton sopra tutto provano che da gran tempo era preparata questa grande scoperta, quando essa fu proclamata da Leibniz. Malgrado il rispetto che ci ispira l' autorità di Lagrange, bisogna però riconoscere che Leibnitz nel portare il giudizio sulla metafisica e sulle conseguenze della sua scoperta, ha lasciate dietro di se tutti quelli che gli potrebbero essere opposti come rivali, senza eccettuare Newton stesso.

I servigi che la invenzione del calcolo infinitesimale ha resi alle scienze sono innumerevoli. La geometria pura, la meccanica, la fisica, e l' astronomia teorica soprattutto sono state sin non create rinnovate interamente per mezzo di questo istrumento meraviglioso. Euler, Ma-

claurin, Lambert, Clairaut, d'Alembert, Lagrange, Monge, Laplace, Legendre, Abel ec. debbono essere rammentati tra quelli che più si sono occupati della teoria e delle applicazioni dei nuovi calcoli; e senza rammentare alcuni dei geometri viventi, basterà dire che la Francia non ha cessato di mantenersi nella cultura di questa parte di scienza al posto eminente che acquistò dai primi tempi.

Citeremo tra le opere che debbono essere consultate per istudiare con frutto il calcolo infinitesimale quelle di Cauchy, Cournot, Duhamel, Lacroix, Moigno, Navier ec. Carnot nella sua metafisica del calcolo infinitesimale, Lagrange nella sua teoria delle funzioni analitiche, Wronski in diverse opere sull'algoritmia, hanno preso di mira principalmente la filosofia di questo calcolo.

L'analisi degli infinitamente piccoli dell'Hospital, e le *Lectiones matematicae* di Giovanni Bernoulli, sono i due primi scritti nei quali sia stato esposto metodicamente e con qualche estensione il principio del calcolo differenziale e del calcolo integrale: il calcolo delle flussioni di Maclaurin è la opera migliore che sia stata pubblicata secondo il metodo e le notazioni di Newton. La seconda edizione del gran trattato in tre volumi in 4°, pubblicato da Lacroix dal 1810 al 1819 è la esposizione la più completa dei lavori dei geometri che si sono occupati dell'analisi infinitesimale fino all'epoca in cui questo trattato è stato pubblicato. Ma debbonsi studiare le memorie delle diverse società di scienze, e tutti i giornali scientifici, e le opere di geometri che si sono distinti dalla fine del secolo decimo settimo in poi, se vogliamo acquistare cognizioni profonde nella importante branca di matematiche della quale abbiamo dato un rapido cenno.

V. CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

§1. *Principii generali del calcolo delle probabilità.*

PRELIMINARI. Questo ramo importante delle matematiche serve a rendere comparabili tra loro le differenti ipotesi, che si possono fare sugli avvenimenti futuri o sulle cagioni degli avvenimenti.

« Tutti gli avvenimenti, dice Laplace, anco quelli che per la loro piccolezza sembrano non rannodarsi alle grandi leggi della natura ne sono una conseguenza necessaria quanto le rivoluzioni del sole .... La curva descritta da una sola molecola di aria o di vapore, è regolata in un modo tanto certo quanto le orbite dei pianeti, senza differenza altra che quella vi pone la nostra ignoranza ». Ciò che si deve intendere per probabilità è relativo in parte a questa ignoranza ed in parte alle nostre conoscenze. Se noi sappiamo che sopra tre o più avvenimenti deve accaderne un solo, è probabile che tra questi uno determinato a piacere non accada, poichè più casi egualmente possibili ne escludono la esistenza, mentre uno solo è favorevole a questo.

La probabilità di un avvenimento è il rapporto che esiste tra il numero dei casi favorevoli a questo, e il numero totale dei casi possibili perciò essa è rappresentata da una frazione sempre minore dell'unità. L'unità è il simbolo della certezza.

Un avvenimento deve essere considerato come probabile quando la sua probabilità è maggiore di $\frac{1}{2}$: perchè i casi favorevoli sono in numero maggiore dei contrari.

Quando un avvenimento non ammette che due casi possibili, se uno di questi ha una probabilità maggiore di $\frac{1}{2}$, l'altro ha una probabilità minore. Dal che si vede quanto era falsa l'asserzione che Pascal ha sì bene stimatizzato nelle sue provinciali, che due tesi contrarie possano essere tutte due probabili.

La parola caso non esprime che la ignoranza nostra della causa dei fenomeni.

CALCOLARE LE PROBABILITÀ NEI CASI PIÙ SEMPLICI. I La definizione stessa del-

la probabilità prova che essa non dipende dal numero assoluto dei casi favorevoli e possibili ma dal loro rapporto.

Nel calcolare le probabilità si paragonano ordinariamente gli avvenimenti di specie differente a delle palle di differenti colori mescolate e ripartite in una o più urne, secondo leggi determinate interamente o parzialmente dall'enunciato della questione.

La somma delle probabilità di tutti gli avvenimenti possibili è costantemente uguale all'unità.

Così se in un urna vi sono m palle nere, n palle bianche, e p palle rosse, la probabilità rispettiva che sarta una palla di uno di questi tre colori, è espressa dalle frazioni

$$\frac{m}{m+n+p}, \quad \frac{n}{m+n+p}, \quad \frac{p}{m+n+p}$$

che hanno per somma l'unità.

Invece di un'urna e di palle, si potrebbe considerare un prisma retto allungato che avesse per basi dei poligoni regolari di $m+n+p$ lati, ed avesse m facce nere, n bianche, e p rosse.

II. Il calcolo dato precedentemente per la probabilità suppone tutti i casi egualmente possibili. Se ciò non è bisognerà determinare primieramente le possibilità respettive, e calcolare il valore di ciascuna; il che è uno dei punti i più delicati della teorica delle probabilità; la probabilità è allora la somma della possibilità di tutti i casi favorevoli.

Per esempio nel gioco noto *palla* o *santi*, se si cerca la probabilità di tirare *palle* una volta almeno in due tiri, si possono dare tre casi differenti, cioè: *palle* al primo tiro, il che dispensa da tirare la seconda volta; *santi* al primo e *palle* al secondo; infine *santi* al primo e al secondo tiro. D'Alembert considerando a torto i tre casi come ugualmente possibili, ne concludeva che la probabilità cercata era $\frac{2}{3}$: mentre si vede che la probabilità di tirare *palle* al primo tiro è $\frac{1}{2}$, quella degli altri due casi è $\frac{1}{4}$ per ciascuno; cosicchè in virtù del principio II la probabilità cercata è $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ o $\frac{3}{4}$.

Si giungerebbe allo stesso risultato considerando che le lettere a e b non possono dare luogo che a quattro disposizioni ugualmente possibili

$$aa,\ ab,\ ba,\ bb,$$

e che di queste quattro disposizioni, tre sono favorevoli all'avvenimento di cui si cerca la probabilità.

L'esempio seguente mostra una nuova applicazione relativa alla probabilità composta.

Un numero a di urne ciascuna delle quali contiene m palle bianche ed n nere, e un numero b di urne ciascuna delle quali contiene p palle bianche, e q palle nere sono messe insieme, acchè prendendo una di queste urne a caso, si domanda la probabilità di estrarre una palla bianca.

La probabilità di estrarre una palla bianca da una delle urne della prima serie è avidentemente

$$\frac{m}{m+n}; \text{ ed è } \frac{p}{p+q}$$

la probabilità di estrarre una palla bianca da un urna della seconda serie.

La probabilità però di mettere la mano sopra un urna della prima serie è

$$\frac{a}{a+b}; \text{ ed è } \frac{b}{a+b}$$

quella di mettere la mano sopra un urna della seconda; per cui le probabilità composte di estrarre una palla bianca dall'una o dalla altra serie sono respettivamente

$$\frac{am}{(a+b)(m+n)} \text{ ed } \frac{bp}{(a+b)(p+q)}$$

e la probabilità totale è evidentemente la somma delle due probabilità parziali.

III. Se gli avvenimenti sono indipendenti gli uni dagli altri, la probabilità della esistenza simultanea di due, di tre ec. è il prodotto delle probabilità semplici di ciascuna: il che si esprime dicendo che la probabilità composta è il prodotto delle probabilità semplici.

Supponismo per esempio raccolte in un mazzo le tredici carte di uno stesso colore preso da un gioco completo di 52 carte, e si cerchi la probabilità che le due prime del mazzo sieno un *asso* ed un *due*. La probabilità che la prima carta

sia no asse nel mazzo di 13 carte è $\frac{1}{13}$; tolta questa carta la probabilità che il due sia la prima delle dodici carte restanti è $\frac{1}{12}$, così la probabilità che queste due cose accadano simultaneamente sarà

$$\frac{1}{13} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{156}$$

Si giungerebbe allo stesso risultato, benchè in un modo meno semplice risalendo alla enumerazione di tutti i casi possibili. Il numero delle permutazioni di cui sono suscettibili 13 carte (V. algebra pag. 64) è

$$1 . 2 . 3 ..... 12 . 13$$

Quando due delle tredici carte hanno un posto determinato non si possono permutare le altre undici che in

$$1 . 2 . 3 .... 10 . 11$$

maniere possibili, così questo numero rappresenta il numero dei casi favorevoli; e per conseguenza il rapporto di questo prodotto a quello che rappresenta tutti i casi possibili esprime la probabilità, ed è $\frac{1}{12 . 13}$ sopprimendo i fattori comuni.

IV. Quando due avvenimenti dipendono l'uno dall'altro, la probabilità che accadano ambedue è sempre il prodotto della probabilità del primo per la probabilità che accadute queste accaderà anco l'altro.

Così avendosi tre urne A, B, C due delle quali non contengono che palle bianche, e una palle nere, si cerca la probabilità di estrarre una palla bianca dalla urna B ed una dalla urna C. La probabilità di estrarre una palla bianca dalla urna C è $\frac{2}{3}$, e se la palla estratta è bianca, l'indecisione non può cadere che sulla altra urna B, e la probabilità di estrarre una palla bianca da B è $\frac{1}{3}$; per cui la probabilità di estrarre due palle bianche dalle urne B e C è

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Calcolando la probabilità di un avvenimento che abbia già avuto luogo, e quella di un secondo avvenimento che si aspetta, e dipendente dal primo con probabilità composta, questa seconda probabilità divisa per la prima, rappresenta la probabilità del secondo avvenimento, quando il primo si è già verificato. Questo principio è un corollario del precedente.

DETERMINARE LA PROBABILITÀ CHE UN CASO SI RIPETA PER UN NUMERO DI PROVE SUCCESSIVE. Qui si intende parlare della ripetizione successiva di avvenimenti indipendenti gli uni dagli altri, come i tiri successivi di uno stesso numero di dadi uguali, o l'estrazione di numeri presi in un'urna, e ripostivi dentro ogni volta, per conservare sempre lo stesso rapporto nel numero delle probabilità della stessa specie.

Le probabilità di questi avvenimenti si determinano primieramente per mezzo delle probabilità composte.

Per esempio trattandosi di sapere quale è la probabilità di tirare due volte di seguito lo stesso punto sei con un dado che ha sei facce, è lo stesso che cercare il concorso di due avvenimenti dei quali la probabilità semplice è $\frac{1}{6}$; questa probabilità sarà dunque

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

La probabilità di non ottenere 6 in due tiri è $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$. La somma di queste due probabilità non è uguale all'unità, perchè ci è inoltre il caso in cui si facesse sei soltanto al primo tiro la cui probabilità è $\frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$, e quello in cui si facesse solo al secondo la cui probabilità è $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$. La riunione di queste probabilità la quale corrisponde a tutti i casi possibili è

$$\frac{1}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{25}{36} = \frac{36}{36} = 1.$$

I termini delle formole del binomio di Newton danno al tempo stesso tutte le

probabilità dei diversi casi che risultano dal tirare successivamente lo stesso dado un certo numero m di volte. Poichè designando con p e q le probabilità respettive di due casi l'uno opposto all'altro, si vede da ciò che precede che $p^{m-n}\,q^n$ è la probabilità che in m tiri il caso q si ripeta n volte in un ordine determinato. Ma se non si determina l'ordine in cui si succedono i casi q poichè gli m tiri presi n ad n possono dare un numero di combinazioni differenti, determinato dal coefficiente della formula del binomio nel termine che ne ha n avanti di se (V. algebra pag. 64) la probabilità di ottenere n volte il caso q e $m-n$ volte il caso p sarà espressa da

$$\frac{m\,(m-1)\,\ldots\,(m-n+1)}{1.\ 2.\ \ldots\ \ldots\ n}\,p^{m-n}\,q^n$$

Adunque i diversi termini dello sviluppo della potenza m pel binomio $p+q$ danno la probabilità di ottenere i casi p e q un numero determinato di volte in m tiri.

La somma dei due primi termini dello sviluppo dà la probabilità che il caso p si ripeterà almeno $m-1$ volte in m prove.

La somma dei tre primi termini indica la probabilità che il caso p si ripeterà almeno $m-2$ volte in m prove, e il caso q più di due volte. Se per esempio si cerca la probabilità di fare il punto 6 almeno due volte in quattro tiri successivi di un dado che ha sei facce; si farà

$$p=\frac{1}{6},\ q=\frac{5}{6},\ m=4$$

e si prenderà la somma dei 3 primi termini dello sviluppo di $(p+q)^4$ e si avrà

$$\frac{1}{6^4}+4.\frac{5}{6^4}+6.\frac{25}{6^4}=\frac{171}{1296}$$

probabilità che è compresa tra un settimo ed un ottavo.

Ci possiamo proporre di determinare il numero delle prove necessarie, perchè un avvenimento acquisti una probabilità determinata. Se si cercasse il numero m dei tiri, occorrerebbe per ottenere una probabilità g determinata di far 6 almeno $m-n$ volte si avrebbe $p=\frac{1}{6}$ $q=\frac{5}{6}$ e bisognerebbe determinare m in modo che si avesse

$$g=p^m+m\,p^{m-1}q+\ldots$$
$$+\frac{m\,(m-1)\,\ldots\,(m-n+1)}{1.\ 2.\ \ldots\ \ldots\ n}\,p^{m-n}q^n$$

il che però si potrà solamente fare dando ad m dei valori successivi e ripetendo più volte i tentativi. Quando n è più grande di $\frac{m}{6}$ si può render la ricerca più spedita prendendo la condizione.

$$1-g=q^m+\frac{m}{1}q^{m-1}+\ldots$$
$$+\frac{m\,(m-1)\,\ldots\,n}{1.\ 2\ldots(n+1)}\,q^{n+1}p^{m-n-1}$$

nella quale il numero dei termini è minore che nella precedente.

Se si cerca per esempio in quante prove si otterrà la probabilità g che il caso p abbia luogo almeno una volta si potrà prendere

$$1-g=q^m$$

da cui si trae

$$m=\frac{\log.\,(1-g)}{\log.\,q}$$

Questa formola servirà a trovare il numero di tiri che bisogna fare con due dadi, perchè si abbia la probabilità uguale per fare ee doppio sei che per non farlo ponendo

$$1-g=\frac{1}{2},\ p=\frac{1}{36},\ q=\frac{35}{36}$$

il che darà

$$m=\frac{\log.\,2}{\log.\,36-\log.\,35}=24{,}6$$

il che dimostra che il tiro proposto è meno probabile del contrario in ventiquattro volte, e più probabile tirando 25 volte.

LEGGE DEI GRANDI NUMERI. Tra le cagioni variabili ed incognite che noi designiamo con la parola *caso*, che rendono incerto ed irregolare l'andamento degli avvenimenti, finchè non si considerano che pochi particolari, si vede nascere moltiplicandosi il numero di questi una regolarità rimarchevole. Se noi supponiamo in un urna delle palle bianche e delle palle nere, e supponiamo che dopo ciascuna estrazione si rimetta nell'urna la palla

che ne è stata cavata, per ripetere quindi le estrazioni successive, il rapporto del numero delle palle bianche estratte, al numero di quelle nere estratte sarà nelle prime estrazioni sovente irregolarissimo; ma le cagioni variabili di questa irregolarità distruggendosi tra loro in un gran numero di estrazioni, questo rapporto si avvicinerà sempre di più a quello delle palle bianche e delle palle nere contenute nell'urna, e misura che il numero delle estrazioni diviene più grande, ossia al rapporto delle possibilità respettive di estrarre una palla di uno di questi due colori ad ogni estrazione.

Questo esempio particolare servirà a fare intendere una proposizione conforme alle regole del buon senso, ed alle osservazione ripetuta, la cui dimostrazione che offre molta difficoltà, è stata data per la prima volta da Giacomo Bernoulli. Questo si enuncia nel modo seguente.

Si può stabilire un numero di prove tale che dia sempre una probabilità vicina quanto si vuole alla certezza, che il rapporto del numero delle volte che un avvenimento ha avuto luogo a quello delle prove ripetute, non differisca dalla probabilità semplice di questo avvenimento al di là di un limite dato per quanto si voglia ristretto. Da questo resultato ne segue immediatamente che i rapporti degli effetti della natura sono presso a poco costanti quando questi si considerano in gran numero. Così malgrado la varietà delle annate, la somma delle produzioni in un numero di anni considerabile è sensibilmente la stessa, ed appartiene all'uomo a ripartire in tutto questo tempo i beni che la natura produce ogni anno con una apparente disuguaglianza.

Molti effetti dovuti a cagioni morali sono casi pure sottoposti alla legge dei grandi numeri. Il rapporto delle nascite annue alla popolazione e quello dei matrimoni alle nascite non subiscono che variazioni piccolissime.

Si vede pure che in una serie di avvenimenti prolungata indefinitamente l'azione delle cagioni regolari e costanti deve vincerla a lungo andare sull'azione delle cause irregolari. È però che i guadagni di una lotteria sono certi quanto i prodotti della agricoltura, poichè il numero preponderante di casi favorevoli che si riserva gli assicura nell'insieme di un gran numero di giocate un utile considerevole.

Nel modo stesso riguardando alle probabilità di utile generale che derivano dall'osservanza dei principii eterni di umanità e di giustizia e di ragione che fondano e governano le società, si trova anco in questo solo il motivo di non allontanarsi giammai da questi principii.

La regolarità evidente, che si manifesta nella successione indefinitamente prolungata di avvenimenti dello istesso genere, è stata considerata sempre a giusto titolo come una prova della Provvidenza. Ed in vano si è negata la realtà delle basi di questa credenza si generale e sì consolante pretendendo sostituirgli le cieche leggi di una volontà senza intelligenza. Difatto ammettere queste leggi, è rendere onore tacitamente alla suprema intelligenza che sola può averle stabilite.

§ 2. *Applicazioni del calcolo della probabilità.*

APPLICAZIONE DELLE COMBINAZIONI. La probabilità di estrarre un numero pari o dispari, prendendo a caso da una serie di m numeri, sono espresse respettivamente dalle frazioni

$$\frac{2^{m-1}-1}{2^m-1}, \quad \frac{2^m-1}{2^m-1}$$

La probabilità di vedere uscire almeno un numero tra due giocati, in una estrazione di 5 numeri sopra novanta imborsati, è uguale alla somma delle due frazioni

$$2\,\frac{88\,.\,87\,.\,86\,.\,83}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \text{ e } \frac{88\,.\,87\,.\,86}{1\,.\,2\,.\,3}$$

divisa per la frazione

$$\frac{90\,.\,89\,.\,88\,.\,87\,.\,86}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}$$

ossia a $\frac{87}{801}$.

Dopo 100 estrazioni la probabilità che sieno sortiti tutti i numeri è 0,7510 approssimata fino ad 0,0001, dopo 200 estrazioni questa probabilità è 0,9990 che differisce poco dalla unità o dalla certezza.

Giochi. Speranza matematica e speranza morale. Devo riguardarsi come giusto quel gioco nel quale le somme arrischiate sono proporzionali alle probabilità della vincita.

Chiamando *speranza matematica* il prodotto della probabilità per la vincita sperata da un giocatore, ossia per la messa dell' altro; il principio precedente si enuncia dicendo che innanzi di cominciare il gioco le speranze matematiche dei giocatori debbono essere uguali.

Quando i giocatori si separano avanti che il gioco sia terminato, si dividono le somme poste in gioco secondo un altro principio, cioè; ogni giocatore perde la proprietà del danaro giocato; ma acquista sulle somme in gioco un diritto proporzionale alla probabilità della vincita.

Quando le speranze matematiche non sono eguali, allora in virtù della legge dei grandi numeri, la vincita di uno dei giocatori deve andare accrescendosi, o si può sempre determinare un numero di giochi per il quale la probabilità che questa vincita arrivi ad una somma determinata sia vicina alla certezza quanto si vuole.

A ciò deve attribuirsi la cagione dei guadagni delle case di gioco e delle lotterie, il successo delle quali non è fondato che sulle malvagie passioni, o sulla ignoranza degli individui che cercano i loro mezzi di sussistenza o la ricchezza altrove che nell' onesto guadagno dovuto ad un lavoro utile alla società.

Deve però aggiungersi che anco allorquando le probabilità di successo sieno uguali, un uomo ragionevole non consentirà mai ad esporre una grande somma per speranza di un piccolo guadagno quantunque probabilissimo; ma al contrario si determinerà facilmente ad avventurare una piccola somma, per un guadagno considerevole quantunque piccola sia la probabilità di ottenerlo. Per cui bisogna distinguere *la speranza morale* dalla speranza matematica, e non prendere questa per unica norma nelle circostanze analoghe a quelle che noi abbiamo indicato

Modo singolare di trovare con tentativi ripetuti il rapporto della circonferenza al diametro. Conducendo sopra una superficie piana una serie di linee ugualmente distanti, si prenda un ago cilindrico di una lunghezza minore dell'intervallo costante che separa le parallele, e si lasci cadere a caso un gran numero di volte sulla superficie coperta di linee, contando il numero totale delle volte in cui l' ago è stato lasciato e quello delle volte in cui ha incontrato qualcuna delle parallele, il rapporto di questi due numeri moltiplicato per il doppio del rapporto della lunghezza dell' ago agli intervalli equidistanti, esprime il rapporto della circonferenza al diametro, con una approssimazione tanto maggiore quanto le prove sono state più volte ripetute.

Designando con d l' intervallo delle parallele, con a la lunghezza dell' ago, con p il numero delle intersezioni, e q il numero delle volte che l' ago è stato gettato, numero che si suppone molto grande, si avrà la formula

$$\pi = \frac{2\,aq}{pd}$$

In un dato numero di prove si avrà il minimo errore possibile, quando la lunghezza a dell'ago sarà uguale ad un quarto del prodotto dell' intervallo d delle divisioni per il rapporto π dato dalla geometria (V. p. 96).

Così può farsi l'esperienza con un ago di 50 millimetri e con delle parallele che abbiano 63 millimetri e $\frac{8}{10}$ di distanza, o con altri dati proporzionali ai numeri precedenti.

Somma di alcune serie. Leibnitz facendo una applicazione non meno singolare della precedente dovuta a *Laplace* osserva per trovare il valore della serie indefinita

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \text{ ec}$$

che la serie diviene l' unità o zero, secondo che si prende un numero di termini pari o dispari, e poichè in un numero di termini infinito non vi è ragione di preferire il pari o il dispari, si deve secondo le regole delle probabilità, prendere la metà dei risultati relativi a questi due casi che è $\frac{1}{2}$ per il valore vero della serie.

Lacroix ha provato che nulla si opponeva, perchè questo ragionamento fosse

ammesso, ad onta delle obiezioni fatte da Laplace (Vedi il Trattato in 4° di calcolo differenziale e di calcolo integrale, t. III, pag. 160).

Risultati medii. — Metodo dei minimi quadrati. Una delle più utili applicazioni del calcolo delle probabilità, consiste nella ricerca del risultato più probabile in un certo numero di operazioni che danno risultati differenti.

Nel caso più semplice in cui la determinazione di una quantità non dipende che dalla osservazione di un solo fatto, si deve prendere la media aritmetica di tutte le osservazioni; cioè la somma dei numeri dati dalle osservazioni, divisa per il numero di queste.

In generale quando la teoria da una equazione della forma

$$x + ay + bz + ct + \ldots + k = 0 \ldots (1)$$

per esprimere una certa legge che mette in relazione tra loro le n variabili x, y, z, t..., e non da i valori dei coefficienti costanti a, b, c..., k, possiamo proporci di determinarli con la esperienza il più esattamente possibile.

Supponiamo si abbia un gran numero di osservazioni $n+m$ assai maggiore del numero n dei coefficienti che si vogliono determinare.

La sostituzione di m risultati delle osservazioni fatte nella equazione (1) darebbe n equazioni sufficienti a determinare gli n coefficienti a, b, c..., k. Ma calcolati così i coefficienti, la sostituzione dei risultati delle altre m osservazioni non renderebbe in generale le equazioni (1) identiche; il secondo membro invece di essere nullo prenderebbe un valore numerico E, il quale non è altro che l'errore dovuto a qualche inesattezza nelle osservazioni.

Il calcolo delle probabilità dimostra che per ottenere la più grande approssimazione possibile, bisogna fare in modo che la somma dei quadrati degli errori E sia un minimo. Ora secondo i principii del calcolo differenziale (pag. 165) questa ultima condizione da le n equazioni seguenti nelle quali il segno Σ indica una somma aritmetica di quantità simili corrispondenti alle $n + m$ osservazioni

$$\Sigma xy + a\Sigma y^2 + b\Sigma yz + c\Sigma yt + \ldots = 0$$

$$\Sigma xz + a\Sigma yz + b\Sigma z^2 + c\Sigma zt + \ldots = 0$$

$$\Sigma xt + a\Sigma yt + b\Sigma zt + c\Sigma t^2 + \ldots = 0$$

. . . . . .

La legge di tutte queste equazioni è evidente; in generale per formare l'equazione del *minimo*, per rapporto ad uno dei coefficienti da determinare $a, b, c \ldots$, bisogna moltiplicare tutti i termini della equazione proposta per la variabile che ha questo coefficiente nella equazione, ed eguagliare a zero la somma dei risultati che si ottengono sostituendo nel prodotto tutti i dati delle osservazioni. Si ottiene così tra gli n coefficienti $a, b, c, \ldots k$, un numero n di equazioni, che si formano con il concorso di tutte le osservazioni, e che servono a determinare i valori più probabili di questi coefficienti.

Nel caso in cui si debbano determinare due soli coefficienti della equazione $x - ay - k = 0$ i valori di questi sono dati dalle formule

$$a = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{n\Sigma y^2 - \Sigma y \Sigma y}$$

$$k = \frac{\Sigma x \Sigma y^2 - \Sigma y \Sigma xy}{n\Sigma y^2 - \Sigma y \Sigma y}$$

Il metodo dei minimi quadrati esposto precedentemente, si adopra ad ogni istante nella astronomia nella fisica e nelle scienze di osservazione. Il sig. Müntz ingegnere di ponti e strade l'ha applicato

coe successo alla esatta determinazione della formula dei trasporti che è

$$x - ay - k = 0$$

essendo a il prezzo del trasporto dell'unità di peso all'unità di distanza, k la spesa costante di carico e scarico per uno stesso materiale, ed infine x il costo del trasporto dell'unità di peso alla distanza y. (V. *Annales des Ponts et Chaussées*, 1° sem. del 1834 pag. 86).

§ 3. *Cenni istorici e bibliografici*.

Niuno innanzi Pascal e Fermat aveva dato i principii ed i metodi per sottoporre al calcolo i rapporti dei casi favorevoli e contrari, le regole sulle somme giocate e sulle scommesse, in un gioco determinato.

Il cavalier de Méré rivolse il primo l'attenzione di Pascal al calcolo delle probabilità, proponendogli di trovare il numero di tiri per il quale vi è tanta probabilità di fare con due dadi doppio sei che di non farlo. (V. pag. 184). Mentre non è rimasto che la memoria dei paradossi che la soluzione di Pascal ispirò al cavaliere de Méré; le tracce delle meditazioni del gran geometra si ritrovano nella sua opera ammirabile (*Pensées*) nella quale si vede una predilezione particolare pei ragionamenti fondati sulla discussione delle probabilità. Del resto il suo emulo illustre, il consigliere del parlamento di Tolosa dette egli pure sul problema più difficile che ambedue abbiano trattato una soluzione che ha più generalità di quella di Pascal. Percui i nomi di Pascal e di Fermat debbono essere associati a tutto ciò che riguarda l'invenzione e i primi sviluppi di questo importante ramo delle matematiche.

Huygens nel piccolo trattato che ha per titolo *De Ratiociniis in ludo aleæ* riunì i diversi problemi fino allora risoluti, e ne aggiunse dei nuovi, Hudde e Witt in Olanda ed Halley in Inghilterra applicarono il calcolo alle probabilità della vita umana. Giacomo Bernoulli propose quindi ai geometri diversi problemi di probabilità, dei quali poi dette la soluzione componendo l'opera *Ars conjectandi*, la quale non vide la luce che nel 1713 sette anni dopo la morte dell'autore accaduta nel 1706. Frattanto Montmort pubblicava il suo trattato *Essai d'analyse sur les jeux de hasard* (la 1ª edizione è del 1709 la 2ª del 1713) ed Abramo Moivre, francese domiciliato in Inghilterra dopo la revoca dell'editto di Nantes, dava alla luce nel 1711 il suo trattato: *Doctrine of Chances* che perfezionò le tre edizioni successive.

VI. ARITMETICA SOCIALE

Preliminari. Questa scienza ha per oggetto il determinare gli elementi numerici che possono interessar l'uomo nella società. Essa è per tutte le applicazioni sociali delle scienze quello che l'aritmetica ordinaria è per le scienze considerate in se stesse. Deve dunque logicamente precedere l'applicazione di esso all'*Agricoltura*, all'*Industria*, al *Commercio* e all'*Arte militare*, per cui le nazioni vivono, si arricchiscono, si sviluppano o si difendono.

§ 1. *Pesi e misure dei popoli antichi e dei moderni*.

Sistema decimale o metrico francese. Prima di parlare delle misure delle diverse parti d'Italia e degli altri popoli, è bene dare ne' idea di questo nuovo sistema. Esso si chiama decimale perchè colla unità principale di ciascuna specie se ne formano delle altre maggiori o minori, le prime cioè 10, 100, 1000.... volte più grandi e le seconde 10, 100, 1000.. più piccole dell'unità medesima. Questa unità principale è il *metro*, e perciò il sistema dicesi anco *metrico*: finalmente si chiama francese, perchè fu ritrovato in Francia ed ivi praticato per la prima volta. Il confronto di esso colle misure delle altre nazioni mostra quanto sarebbe utile che fosse da per tutto adottato, e ne forma il più bello elogio. In questo sistema, come abbiamo detto, il *metro* è l'unità di lunghezza e corrisponde alla diecimilionesima

sima parte della distanza del polo terrestre all'equatore. In altri termini, è stata determinata la lunghezza del metro misurando le dimensioni della terra, e dividendo in 40 milioni di parti eguali la circonferenza del nostro globo misurata sopra un meridiano.

L'unità di superficie è l'*aro*, o un quadrato, il cui lato è *dieci* metri. L'aro dunque si compone di *cento* metri quadri.

Il *litro* è l'unità di capacità per i liquidi e i quasi liquidi. Esso equivale a un cubo che abbia per lato la decima parte del metro. Un metro cubo è eguale dunque a *mille* litri.

Lo *stero* è l'unità di volume per il legname, ed equivale ad un metro cubo.

Il *grammo* unità di peso, è il peso del volume di acqua al *maximum di densità* (cioè alla temperatura di 4°, 44), equivalente a quello di un piccolo cubo, il cui lato sia la centesima parte del metro. E siccome il litro è eguale a 1000 di questi piccoli cubi, così il peso di un litro d'acqua corrisponde a 1000 grammi.

Il *franco* è l'unità di misura monetaria. Essa è composta di 9 parti di argento fino e di una di lega, e deve pesare 9 grammi.

Tutte le unità dunque di questo sistema di pesi e misure dipendono dal metro, che è il *modello* del sistema medesimo.

Per esprimere facilmente le quantità minori delle unità principali, si pensò di dividere ciascuna di esse in 10, 100, 1000.... parti eguali, che si indicano mettendo innanzi al nome dell'unità le voci derivate dal latino

deci, *centi*, *milli*, *decimilli*, ec.

similmente per le quantità che contengono più di dieci volte le unità principali si premettono al nome di queste unità le seguenti voci cavate dal greco

deca, *ecto*, *chilo*, *miria*,

le quali indicano dei multipli dell'unità principale respettivamente eguali a 10, 100, 1000, 10000... volte questa unità.

Dopo ciò si intendono facilmente le parole *miriametro* (diecimila metri), *centiaro* (centesima parte dell'aro), *ettolitro* (cento litri), *decistero* (decima parte dello stero), *chilogrammo* (mille grammi).

Il principale vantaggio di questo sistema consiste nella sua perfetta analogia col sistema di numerazione decimale adottato per i *numeri astratti*, considerati cioè indipendentemente dalla specie di unità a cui si riferiscono. Per questa analogia, si possono scrivere sotto la forma d'interi, come le frazioni decimali (pag. 19), tutti i numeri espressi in questi nuove misure, e si possono semplicizzare notabilmente tutte le operazioni che ci occorre di fare su questi numeri medesimi.

La combinazione delle sette parole *miria*, *chilo*, *ecto*, *deca*; — *deci*, *cento*, *milli*, con le voci delle unità principali: metro, aro, litro, stero, grammo, franco, forma 42 nomi di multipli o di submultipli di queste unità. Si potrebbe dunque credere che il sistema di queste misure eccedesse 48 denominazioni differenti, non andando più in là dei millesimi. Ma l'uso ha molto ristretto questo numero di voci, d'altronde non tanto esteso: e alcune altre le ha modificate in modo da non nuocere all'armonia della lingua. Infatti non si usano le parole *ectometro*, *decaro* (dieciari), *millilitro*, *ectostero*, *chilostero*, *decafranco*, *ettofranco*, *chilofranco* ec.; e per indicare i submultipli del franco, invece di decifranco e centifranco, si dice *decimo* e *centesimo*.

Nella tavola seguente sono riuniti i nomi delle misure le più usate: tuttavia colle regole di nomenclatura date di sopra, e che la semplice ispezione della tavola fa di leggeri comprendere, si potranno riempire i voti avvertitamente lasciati per i multipli e i submultipli meno usitati.

Il mezzo più proprio per formarsi un'idea chiara dei valori assoluti di queste misure, consiste nel cercare le espressioni del peso o delle dimensioni di oggetti conosciuti.

Dopo esersi così esercitati per qualche tempo, sarà facilissimo il comprendere ciò che significhino le espressioni metriche le più comuni.

Si deve osservare però che, in pratica, si prendono per unità principali la più parte dei submultipli o multipli decupli di ciascuna unità, e si evita così di pronunciare più nomi per uno stesso numero.

Così per leggere 2 miriagrammi 7 chilogrammi 4 ettogrammi e 8 decagrammi, si dirà 27 chilogrammi e 48 centesimi.

Egualmente si dirà 621 ettolitri e 354 millesimi, invece di 6 mirialitri 2 chilolitri 1 ettolitro 3 decalitri 5 litri e 4 decilitri.

In Francia si usano le denominazioni di *quintale* metrico e di *tonnellata* metrica per i pesi di 100 e di 1000 chilogrammi; e la seconda denominazione è usitatissima nel commercio marittimo.

Quando si tratta di superficie o di volumi molto considerevoli, per i quali l'ettaro (quadrato che ha per lato 100 metri) e lo stero sarebbero unità troppo piccole, si fa uso del chilometro o del miriametro quadrato, del decametro e dell'ettometro cubi.

Nelle valutazioni delle superficie e dei cubi non devesi confondere un decimo, un centesimo, un millesimo di metro quadrato o cubo, con un decimetro, un centimetro, un millimetro quadrato o cubo. Perchè prendendo i numeri

1, 10, 100, 1000, ...

i loro quadrati sono

1, 100, 10 000, 1000 000, ...

e i cubi

1, 100, 1 000 000, 1 000 000 000, ...

Un *decimetro quadrato* non è dunque che la *centesima* parte di un metro quadro, e un decimetro cubo la millesima parte del metro cubo. Un *centimetro quadrato* è la *diecimillesima* parte del metro quadro; un *centimetro cubo* la *milionesima parte* del metro cubo, e così di seguito.

Si avviterà però qualunque errore in questo senso dando alle cifre decimali che vengono dopo l'unità principale le denominazioni di decimi, centesimi, millesimi, ... dell'unità suddetta, e non quelle di deci, centi, milli, delle unità di superficie o di volume di cui si tratta.

Questa distinzione è essenziale. In Francia la Camera dei deputati, nel discutere la legge relativa al diritto di bollo e di porto dei giornali e scritti periodici, votò, or sono alcuni anni, un articolo in cui parlavasi di giornali di trenta e di quindici *centimetri quadrati*. Il più grande di questi giornali sarebbe stato più piccolo di una carta da giocol L'errore fu subito mostrato alla Camera stessa, la quale aveva voluto parlare di *centesimi di metro quadro* o non di *centimetri quadrati*. Nella legge poi del 14 settembre del 1830, non si cadde in questo errore, poichè si parlò solo di fogli di trenta e quindici decimetri quadrati. Un decimetro quadrato è la centesima parte del metro quadro.

TAVOLA SEMPLICIZZATA DELLE MISURE

DEL SISTEMA METRICO.

MULTIPLI DECUPLI DELLE UNITÀ SEMPLICI				UNITÀ SEMPLICI.	SUDDIVISIONI DELLE UNITÀ SEMPLICI		
Miria. (10000)	Chilo. (1000)	Etto. (100)	Deca. (10)		Deci. $\left(\frac{1}{10}\right)$	Centi. $\left(\frac{1}{100}\right)$	Milli. $\left(\frac{1}{1000}\right)$
Miriam.	Chilom.	»	»	METRO.	Decim.	Centim.	Millim.
»	»	Ettaro.	»	AGO.	»	Centiaro.	»
»	»	Ettolitro.	Decalitro.	LITRO.	Decilitro	Centilitro.	»
»	»	»	Decastero.	STERO.	Decistero	»	»
»	Chilogr.	Ettogram.	Decagram.	GRAMMO.	Decigram.	Centigr.	Milligram
				FRANCO.	Decimo	Centesimo	»

Tavole delle principali monete, pesi e misure d' Italia coi loro valori corrispondenti secondo il sistema decimale.

MONETE

Metal	Denominazione		Valore
	Bologna		
ARG.	Scudo = dieci paoli del 1803.	fr.	5,37
	Quinto di scudo = 20 baiocchi.	»	1,07
	Testone = 30 baiocchi.	»	1,61
	Firenze		
ORO.	Pezzo da 80 fiorini = 10 francesconi.	»	112,00
	Ruspone = 6 francesconi.	»	33,60
	Zecchino = 2 francesconi.	»	11,20
ARG.	Pezzo da 10 lire del 1803.	»	8,40
	Pezzo da 5 lire id.	»	4,20
	Francescone = 10 paoli.	»	5,60
	Lira = 12 crazie = 20 soldi = 240 denari.	»	0,84
	Paolo = 8 crazie.	»	0,56
	Grosso o madonnino = 4 crazie.	»	0,28
	Fiorino = 20 crazie = 100 quattrini o centesimi.	»	1,40
	In Toscana il conteggio si tiene a liro o a fiorini, e in alcuni luoghi a scudi. Lo scudo, ora moneta ideale, equivale a lire 7 toscane.		
	Genova		
ORO	Doppia vecchia.	»	19,75
	Doppia nuova del 1826.	»	40,00
	Genovina nuova.	»	79,76
	Zecchino.	»	11,97
ARG.	Scudo vecchio.	»	6,56
	Scudo di a Giov. Battista.	»	4,16
	Lira fuori di banco = di 20 soldi.	»	0,84
	Lira di banco (il 25 per °/₀ di più).	»	1,09
	Lucca (1)		
ORO.	Doblone o doppia.	»	16,50
ARG.	Scudo di lire 7 e soldi 10.	»	5,62
	Lira di 20 soldi.	»	0,75
	Barbone.	»	0,42
	Malta		
ORO.	Luigi di 10 scudi.	»	23,70
	Pezzo da 24 tari, Pinto Emanoelle.	fr.	4,39
	Oncia del G. M. Ferd. Hompesch.	»	5,48
	Scudo di 12 tari.	»	2,20
	Le scritture si tengono in *Scudi*, *Tarì* e *Grana*; la contabilità pobblica si tiene in monete d'Inghilterra.		
	Milano		
ORO.	Sovrana del 1823 = 40 lire austr.	»	34,80
	Doppia di Giuseppe II.	»	19,87
	Doppia del 1823.	»	19,19
	Zecchino.	»	11,83
	Scudo = 6 lire austr.	»	5,22
	Scudo vecchio.	»	4,61
	Lira vecchia, di 20 soldi.	»	0,77
	Lira austriaca.	»	0,87
	Si conta a lire austriache, e talvolta a lire italiane.		
	Modena		
ORO.	Doppia.	»	19,18
ARG.	Scudo di Francesco III.	»	5,54
	Scudo di Ercole III.	»	5,60
	Scudo nuovo.	»	4,13
	Lira, di 20 bolognini.	»	0,38
	Lira nuova.	»	1,00
	Si tengono i conti tanto in lire nuove d'Italia o franchi, che in lire modenesi.		
	Napoli		
ORO.	Pezza del 1783 = 6 ducati.	»	27,18
	Oncia del 1818 = 3 ducati.	»	12,99
	Oncia del 1826 = 6 ducati.	»	26,00
ARG.	Pezza o piastra = 12 carlini.	»	5,09
	Ducato = 10 carlini.	»	4,24
	Tari = 2 carlini.	»	0,85
	Carlino = 10 grana.	»	0,42
	Le scritture si tengono in ducati.		
	Parma e Piacenza		
ORO	Doppia del 1786.	»	21,91
	Zecchino.	»	11,95
	Moneta nuova del 1825 = 20 lire nuove.	»	20,00

(1) Nel ducato di Lucca, dopo la riunione di esso alla Toscana, le misure legali sono quelle del granducato.

Metal	Denominazione		Valore
ARG.	Ducato del 1796.	fr.	5,18
	Pezzo da 3 lire.	»	0,75
	Lira vecchia di 20 soldi.	»	0,25
	Lira nuova di 100 centesimi.	»	1,00
	L'attuale sistema monetario è il decimale.		
	Roma		
ORO.	Doppia di Pio VI e Pio VII.	»	17,27
	Zecchino di Clemente XIII.	»	11,80
	Moneta del 1835 di scudi cinque.	»	26,86
	Moneta di scudi 2 $^1/_2$.	»	13,44
ARG.	Scudo a tutto il 1834.	»	5,32
	Scudo dopo il 1834 = 10 paoli.	»	5,37
	Mezzo scudo = 50 baiocchi.	»	2,69
	Paolo = 10 baiocchi.	»	0,54
	Si tengono i conti in scudi o piastre di 100 baiocchi.		
	Sardegna		
ORO.	Carlino.	»	49,32
	Doppietta.	»	9,88
ARG.	Lira di 20 soldi.	»	1,88
	Sicilia		
ORO.	Oncia del 1748.	»	13,73
	Oncia del 1818 = 3 ducati.	»	12,99
ARG.	Ducato = 10 tarì.	»	4,24
	Tarì = 10 baiocchi.	»	0,42
	I conteggi si tengono in ducati.		
	Torino (1)		
ORO.	Zecchino.	»	11,94
	Doppia vecchia.	»	30,00
	Doppia di Amadeo III, del 1786.	»	28,46
	Doppia nuova = 20 lire italiane.	»	20,00
ARG.	Scudo vecchio del 1745 = 6 lire.	»	7,08
	Lira vecchia da 20 soldi.	»	1,15
	Scudo nuovo.	»	5,00
	Lira nuova o italiana.	»	1,00
	Venezia		
ORO.	Doppia.	»	21,36
	Zecchino.	»	11,95
	Ducato.	»	7,49

Metal.	Denominazione		Valore
ARG.	Ducatooe o scudo della Croce.	fr.	6,66
	Ducato di s. Giustina.	»	5,86
	Ducato di 8 lire piccole.	»	4,08
	Ducato correote di lire 6 e soldi 4.	»	3,17
	Ducato da olio (il 20 per $^0/_0$ di più).	»	3,87
	Lira da 20 soldi o marchetti.	»	0,51
	Lira austriaca.	»	0,87
	Si conta a lire austriache o talvolta a lire italiano.		
	PESI COMMERCIALI		
Bologna	Libbra di 12 once. Chilogrammi.		0,362
Firenze	Libbra = 12 once = 288 denari = 3456 grani.	»	0,3395
Genova	Libbra di 12 once.	»	0,317
	Rubbio = 25 libbre.	»	7,925
	Cantaro = 10 rubbi = 100 rotoli.	»	47,550
Lucca (2)	Libbra della grascia di 12 once.	»	0,335
	Libbra della commissione.	»	0,344
Milano	Libbra sottile di 12 once.	»	0,327
	Libbra grossa di 28 once.	»	0,263
Modena	Libbra di 12 once.	»	0,340
Napoli	Libbra di 12 once.	»	0,321
	Cantaro piccolo = 150 libbre.	»	48,150
	Cantaro grande = 100 rotoli.	»	89,100
	Rotolo di libbre 2 e once 9 $^1/_2$.	»	0,891
Parma	Libbra di 12 once.	»	0,328
Piacenza	Id.	»	0,318
Roma.	Id.	»	0,339
	Cantaro piccolo = 100 libbre.	»	33,900
Sicilia	Libbra di 12 once.	»	0,317
	Rotolo di libbre 2 $^1/_2$.	»	0,7925
	Cantaro = 100 rotoli.	»	79,250
Torino	Libbra di 12 once.	»	0,369
	Rubbio = 25 libbre.	»	9,225

(1) Negli stati piemontesi, sono state abolite le antiche misure e introdotte le decimali.
(2) Vedi la nota alla pag. 191.

Venezia	Libbra sottile = 12 once.	»	0,301
	Libbra grossa = 12 once.	»	0,477

Misure di capacità per i grani e le biade.

Bologna	Corba = 2 staia = 16 quartaroli.	litri	79
Firenze	Moggio = 8 sacca.	»	585
	Sacco = 3 staia = 6 mine = 12 quarti = 96 mezzette = 192 quartucci.	»	73
Genova	Mina = 4 staia.	»	118
Lucca (1)	Sacco = 3 staia.	»	73
Milano	Moggio = 8 staia.	»	146
	Staio = 4 quartari.	»	18 1/4
Modena	Sacco = 2 staia.	»	127
	Staio = 4 quarti.	»	64
Napoli	Tomolo.	»	52
	Carro di 24 misure = 36 tomoli.	»	1872
Parma	Staio = 2 mine.	»	47
Piacenza	Staio = 2 mine.	»	35
Roma	Rubbio = 12 staia.	»	281
Sardegna	Starello.	»	49
Sicilia	Salma generale.	»	276
	Salma grossa = 16 tomoli.	»	341
Torino (2)	Sacco = 3 mioo.	»	111
Venezia	Moggio = 4 staia.	»	333
	Staio = 4 quarte.	»	83

Misure di capacità per il vino e l'olio.

Bologna	Corba = 60 boccali.	litri	79,0
Firenze	Soma da vino = 2 barili.	»	91,0
	Barile da vino = 20 fiaschi = 40 boccali = 80 mezzette = 160 quartucci.	»	45,5
	Soma d'olio = 2 barili.	»	66,8
	Barile da olio = 16 fiaschi = 32 boccali = 64 mezzotte = 128 quartucci.	»	33,4
Genova	Barile = 90 amolo.	»	80,0
Lucca	Barilo = 30 boccali.	»	35,0
Milano	Brenta = 96 boccali.	»	76,0
Modena	Quartaro = 90 boccali.	»	102,0
Napoli	Barilo = 60 caraffe.	»	42,0
Parma	Brenta = 72 boccali.	»	72,0
Piacenza	Brenta = 96 boccali.	»	76,0
Roma	Barilo = 32 boccali.	»	58,0
	Barile da olio = 28 boccali.	»	57,0
Sicilia	Salma di Messina = 120 quartucci.	»	87,0
	Cantaro di Palermo per l'olio.	»	86,5
Torino	Brenta = 72 boccali.	»	49,0
	Rubbio per l'olio.	»	25 0
Venezia	Barile = 24 bozze.	»	64,0
	Miro per l'olio = libbre 20.	»	16,0

Misure lineari di superficie per i terreni e le fabbriche.

Bologna	Piede.	metri	0,380
Firenze	Braccio = 20 soldi = 240 denari.	»	0,584
	Canna agrimensoria = 6 braccia.	»	2,918
Genova	Palmo di 12 once.	»	0,249
Lucca	Braccio.	»	0,584
Milano	Piede.	»	0,435
	Trabucco di 6 piedi.	»	2,610
	Gettata = 2 trabucchi.	»	5,220
Modena	Braccio.	»	0,523
Napoli	Palmo di 12 parti.	»	0,262
Parma	Braccio.	»	0,545
Piacenza	Braccio.	»	0,570
Roma	Piede moderno.	»	0,298
	Palmo dei costruttori, 3/4 del piede suddetto.	»	0,223
	Canna = 10 palmi.	»	2,230
Sicilia	Palmo.	»	0,251
Torino	Piede liprando di 12 oncie.	»	0,514
	Trabucco = 6 piedi liprandi.	»	3,084
	Piede manuale di 8 once.	»	0,342
Venezia	Piede di 12 parti.	»	0,348
	Pertica piccola = piedi 4 1/2.	»	1,566

(1) Vedi la nota alla pag. 191.
(2) Vedi la nota alla pag. 192.

Misure lineari mercantili.

Bologna	Braccio.	metri	0,640
Firenze	Braccio = 20 soldi = 240 denari.	»	0,584
	Canna da panno = 4 braccia.	»	2,334
Genova	Palmo di 12 once.	»	0,249
	Canna per le tele o le stoffe di 10 palmi.	»	2,491
	Canna grossa di 12 palmi.	»	2,988
Lucca (1)	Braccio per i panni.	»	0,605
	Braccio per la seta.	»	0,593
Milano	Braccio di 12 once.	»	0,595
Napoli	Palmo di 12 parti.	»	0,262
	Canna di palmi 8.	»	2,096
Parma	Braccia da panno e tela.	»	0,640
	Braccio da seta.	»	0,588
Piacenza	Braccio.	»	0,675
Roma	Palmo per le stoffe di 3 parti.	»	0,249
	Canna di 8 palmi.	»	1,992
	Braccio per le tele.	»	0,635
Sardegna	Raso o auna.	»	0,594
Sicilia	Palmo per i panni.	»	0,244
	Canna di palmi 8.	»	1,928
Torino (2)	Raso per le stoffe di once 14.	»	0,599
Venezia	Braccio da Lana.	»	0,679
	Braccio da seta o tele.	»	0,639

Misure agrarie

Bologna	Tornatura = 144 tavolo.	ari	20,80
Firenze (3)	Quadrato = 10 tavolo = 100 pertiche, 1000 decho = 10000 braccia quadro.	»	34,07
Genova	Cannella di 14 palmi quadr.	»	0,09
Lucca	Coltre di 4 quartieri.	»	40,08
Milano	Portica quadra di 24 tavolo.	»	6,55
Modena	Biolca di 72 tavole.	»	28,36
Napoli	Moggio di 90 tavole.	»	33,23
Parma	Biolca di 6 ataia.	»	30,81
Piacenza	Pertica di 24 tavolo.	»	7,62
Roma	Bubbio.	»	184,81
	Pezza.	»	26,40
Sicilia	Salma di 16 tomoli.	»	14,00
Torino	Giornata di 100 tavolo.	»	38,00
Venezia	Migliaio di passi = 4000 piedi.	»	30,23
	Migliaio di ghebbi.	»	24,49

Misure itinerarie.

Firenze	Miglio, braccia 2833 1/2.	chilom.	1,6535
Genova	Miglio.	»	1,488
Lucca	Miglio.	»	1,7715
Milano	Miglio di Lombardia.	»	1,785
Modena	Miglio = 500 pertiche.	»	1,569
Napoli	Miglio.	»	2,226
Parma e Piacenza	Miglio di 75 al grado.	»	1,480
Roma	Miglio.	»	1,489
Sicilia	Miglio.	»	1,858
Torino	Miglio.	»	2,136
Venezia	Miglio.	»	1,933
Italia	Miglio geografico di 60 al grado.	»	1,851
	Miglio comune di 75 al grado.	»	1,481
	Posta, 8 miglia geograf.	»	14,816

Tavola delle principali misure lineari straniere usate in commercio (*in millimetri*).

Amburgo	auna di Amburgo.	»	573,0
	auna del Brabanto.	»	691,4
Amsterdam, auna.		»	690,3
Annover, auna.		»	584,0
Anversa	auna per la seta.	»	694,3
	auna per la lana.	»	684,4

(1) Vedi la nota alla pag. 191.

(2) Vedi la nota alla pag. 192.

(3) In Toscana fra le altre misure agrarie, si usa lo staioro fiorentino = 12 panora = 144 pugnora = 1728 braccia quadre. ari 8,886

Si usano inoltre nel granducato le seguenti misure:

La catasta fiorentina per le legne da ardere = 24 braccia cube.	steri	4,471
La catasta del commercio = 18 braccia.	»	3,378
Il traino per il legname da costruzione = 12 bracciola = 144 once.	steno	398
La tonnellata per i carichi dei bastimenti mercantili = 2000 libbre toscane.	chil.	679,084

Digitized by Google

Ariom	auna ordinaria.	»	683,5
	auna per i paeni bianchi.	»	742,6
Berlino	auna antica.	»	667,7
	auna nuova.	»	666,9
Berna, auna.		»	542,6
Brunswich, auna.		»	570,7
Brema, auna.		»	578,4
Cassel, auna.		»	569,4
Colonia, auna.		»	55,27
Costantinopoli	gran misura.	»	669,1
	piccola misura.	»	617,9
Copenaghen, auna danese.		»	627,7
Cracovia, auna.		»	617,0
Dresda, auna.		»	566,5
Francfort-sul-Meno, auna.		»	547,3
Ginevra, auna.		»	1143,7
Leida, auna.		»	683,1
Lipsia, anna.		»	565,3
Lisboua, vara.		»	1092,9
Londra	piede inglese.	»	304,8
	yard imperiale.	»	914,4
Lubecca, auna.		»	577,0
Madrid, vara (auna di Castiglia).		»	843,0
Mnnaco, auna.		»	833,0
Neufchâtel, auna.		»	1111,1
Norimberga, auea.		»	656,4
Ostonda, auna.		»	699,3
Parigi	anna.	»	1188,4
	tesa.	»	1949,0
	piede.	»	324,8
Pietroburgo, arakeen.		»	711,5
Ragusi, auna.		»	543,2
Riga, auna.		»	548,2
Rosthock, auna.		»	675,2
Stockholm, anna di Svezia.		»	593,7
Stuttgardt, auna di Wurtemberg.		»	614,3
Varsavia, auna.		»	584,6
Vienna	auna di Vienna.	»	779,2
	auna dell'Alta-Austria.	»	799,7
Weimar, auna.		»	564,0
Zurigo, auna,		»	600,1

CORRISPONDENZA DELLE MISURE STRANIERE SI ANTICHE CHE MODERNE COLLE MISURE METRICHE FRANCESI. Le tavole seguenti contengono i resultati del confronto di un gran numero di misure, principalmente delle lineari e delle itinerarie, colle misure decimali.

Questi resultati sono stati tratti da opere meritevoli della nostra fiducia. Le misure itinerarie moderne si debbono a Dulos, capo squadrone nel corpo degl' ingegneri geografici, e ben conosciuto per i suoi lavori di geodesia e metallurgia. Egli ha calcolato la lunghezza media del grado meridiano tenendo conto delle modificazioni arrecate all' espressioni numeriche della misura del globo dalle più recenti ricerche; perciò alcuni valori di queste tavole differiscono da quelli che in opere ultimamente pubblicate, ci sono stati dati da diversi autori.

Allo stesso Dulos si debbono pure le tavole delle misure di lunghezza dei popoli antichi; essu però non ha mancato di avvisarne che i dati su cui vennero fatti i confronti opportuni, sono troppo incerti, perchè i resultati della colonna a destra dell'ultima tavola possono non esser considerati come ipotetici.

§ 2. *Della misura del tempo e del calendario.*

CALENDARIO DEI DIVERSI POPOLI ANTICHI. La tavola che indica la divisione del tempo per giorni, settimane, mesi, stagioni e anni, chiamasi calendario, voce derivata dalle calende romano.

Pare che dopo il giorno sia la settimana il periodo più antico ed il più generalmente adottato per la misura del tempo.

È opinione dei dotti che l' anno degli Egiziani e dei Persiani fosse di 365 giorni; talchè ogni 4 anni esso rimanova indietro di un giorno sull' anno solare, e dopo un intervallo di 1460 anni chiamato *periodo sotiaco o grand' anno canicolare*, l' anno civile ed il solare ricominciavano nel tempo istesso. I 365 giorni erano divisi in 12 mesi di 30 giorni l' uno, e i 5 giorni che restavano si aggiungevano col nome di Epagomeni o complementari.

L' anno dei Greci, secondo Arago, fu di 360 giorni, distribuiti in 12 mesi di 30 giorni l' uno; e dopo un periodo di due anni detto *trieteride* (1), si intercalava un altro mese di 30 giorni; e così essi ebbero alternativamente un anno di 360 giorni ed un altro di 390. Ma 600 anni incirca prima dell' era nostra, avendo progredito le scienze astronomiche, si conobbe che la luna compieva la sua rivoluzione in giorni 29 $^1/_2$: si raddoppiò questo periodo, e si fecero due mesi uno di 30 e l' altro di

1. V. Petavius, *De doctrina temporum*, lib. I, cap. 2

TAVOLA DELLE MISURE ITINERARIE MODERNE

NOMI DEGLI STATI	INDICAZIONE DELLE MISURE.	VALORI IN METRI
Amburgo.	Miglio di 24000 piedi del Reno.	2000,400
Annover.	Miglio = 2214 pertiche = 20084 piedi.	10020,940
Arabia.	Miglio arabo.	1942,042
Austria.	Miglio = 4000 tese = 24000 piedi.	2086,470
Id.	Miglio marino.	1801,080
Baden.	Miglio = 20029,071 piedi di 0,0.	8880,000
Baviera.	Miglio = 23060 piedi del Reno.	2400,780
Belgio.	Miglio metrico.	1000,70
Id.	Lega del Brabante.	6035,000
Id.	Lega di Fiandria = 20000 piedi del Reno.	6077,080
Boemia	Miglio = 20017 piedi del Reno.	6010,124
Brunswick.	Miglio = 24444 piedi del Reno.	10804,110
Calcutta.	Coss, miglio del Bengala = 4000 covid di 0,4470.	1780,800
China.	Li.	877,000
Danimarca.	Miglio = 1400 pertiche = 24000 piedi danesi.	7001,704
Francia.	Lega marina di 20 al grado.	5500,057
Id.	Lega di 20 al grado.	4444,700
Id.	Lega di 22,5 al grado.	4008,628
Id.	Lega di posta di 2000 tese.	2000,070
Id.	Miglio geografico di 60 al grado = 1'	1801,080
Inghilterra.	Miglio = 8 furlong = 1260 yard. = 3280 piedi.	1600,310
Id.	Miglio geografico o marino di 2'	2031,080
Id.	Lega di 20 al grado medio = 6 miglia marine.	3000,000
Italia (v. pag. 104).		
Lubecca.	Miglio geografico.	1801,080
Olanda.	Miglio olandese = 20000 piedi.	5000,000
Id.	Miglio marino di 60 al grado.	5000,007
Persia.	Parasanga = 30 stadi persiani.	5000,000
Polonia.	Miglio di 60 al grado.	5005,007
Portogallo.	Lega di 18 al grado.	6170,000
Id.	Lega marina di 20 al grado.	5000,002
Id.	Miglio marino di 60 al grado = 1'	2832,086
Prussia.	Lega di 20 al grado.	2407,043
Id.	Miglio = 24001 piedi del Reno.	2780,000
Id.	Miglio di Slesia di 20017 piedi del Reno.	6003,000
Russia.	West = 500 sagenes = 1000 arsheen = 3000 piedi inglesi.	1000,781
Id.	Miglio di Lituania = 28000 piedi del Reno.	8004,200
Sassonia.	Miglio detto 32000 piedi di dresda.	9064,020
Sassonia-Weimar.	Miglio.	6708,240
Siam.	Lega o roë-ning = 2000 vouah = (2000 × 1,02197).	3040,040
Spagna.	Lega reale = 20000 piedi.	7086,070
Id.	Lega comune = 18000 piedi.	6000,500
Id.	Miglio marino.	6004,000
Svezia.	Miglio = 2000 pertiche = 20000 piedi di Svezia:	10086,108
Id.	Miglio di Norvegia = 20401 piedi del Reno.	11108,900
Turchia.	Berri.	1000,070
Id.	Miglio marino.	8470,000
Ungheria.	Miglio di Ungheria.	8040,700
Wurtemberg.	Miglio di 10 al grado.	7407,043

29 giorni, che cominciavano per il novilunio o *neomenia*. Ma siccome i 12 mesi lunari di 29 giorni o $^1/_2$ non facevano che 354 giorni, gli 11 giorni che restavano si aggiungevano durante un periodo di 8 anni, detto *ottaeteride*, e formavano 3 mesi intercalari di 30 giorni, che trovavano il loro posto al 3°, al 5° e al 6° anno di questo periodo. Questa maniera di computare si accordava col corso del sole; ma gli

TAVOLA DELLE MISURE LINEARI ANTICHE.

NOMI DEI PAESI	INDICAZIONI E RAPPORTI DELLE MISURE	VALORI IN METRI
Grecia. Attica, Peloponneso, Sicilia, Città greche d'Italia.	Sistema olimpico: Piede greco antico di 600 per ogni stadio olimpico.	0,000004
	Palmo comune o Palesta.	0,077100
	Dattilo.	0,019001
	Cubito.	0,462000
Tessaglia, Illiria, Focide, Tracie, Marsilia.	Sistema pitico o delfico: Piede pitico di 800 per ogni stadio pitico.	0,047050
	Palesto.	0,001012
	Dattilo.	0,070478
	Cubito.	0,071400
Macedonia.	Piede detto filetterico di 600 per ogni stadio filetterico.	0,050250
	Piede macedonico.	0,000300
Sicilia.	Piede di Archimede, di 600 per ogni stadio di Cleomede.	0,000240
	Piede del Campidoglio, di 600 per ogni stadio olimpico = 72 oncie.	0,200518
	Passo = 5 piedi.	2,401000
Roma.	Pertica o decempeda = 10 piedi.	0,000700
Sistema olimpico.	Palmo = 4 digiti.	0,074000
	Grado o *gressus* = 0,5 piedi.	0,740700
	Cubito = 1,5 piedi.	0,444477
	Actus = 120 piedi.	00,555100
Asia greca.	Cubito comune di 640 per ogni stadio grande asiatico di 600 al grado medio detto stadio alessandrino.	0,667647
Misia, Lidia, Caria, Bitinia, Frigia, Licio, Pamfilia, Pisidia, Paflagonia, Ponto, Cappadocia, Cilicia.	Polesta di 5 per ogni cubito comune.	0,040400
	Condilo di 10 id.	0,001703
	Dattilo di 30 id.	0,010651
	Plettro = 30 cubiti comuni.	07,777700
	Decapodo o acena di 10 al plettro.	0,777070
Colchide e Armenia.	Bema diploun (passo doppio) o ompelos di 40 per ogni plettro.	7,500000
	Bema ploun (passo semplice) di 20 al plettro.	0,004400
Asia ebraica e Babilonia.	Cubito comune di 240 per ogni stadio grande asiatico di 600 al grado medio detto stadio ebraico o alessandrino.	0,667647
	Cubito litico di 400 per ogni stadio, di 600,007 al grado medio, detto stadio medio nautico o persiano.	0,470007
	Cubito sacro di 402 per ogni stadio grande asiatico.	0,050000
	Asse = 60 cubiti comuni.	07,777700
	Chebel di 10 per ogni stadio nautico persiano e = 40 cubiti comuni.	10,057070
Persia.	Cubito detto regio, di 400 per ogni stadio persiano.	0,411007

Ateniesi che fecero questa riforma, avean saputo dall'oracolo che l'anno dovova regolarsi sul giro del sole, o i mesi ed i giorni su quello della luna. L'anno civile secondo il loro computo sodisfaceva all'ordine degli dei; ma non era per altro eseguita la seconda parte del loro comando. Infatti dopo 8 anni restava ancora $^1/_2$ giorno, perchè la luna compiesse la sua rivoluzione. Si aggiunsero perciò dopo due ottaeteridi 3 giorni complementari, e così l'anno greco si trovò d'accordo col lunare ma discordò col sole.

Per risolvere questa difficoltà, Metone, celebre astronomo ateniese, immaginò un ciclo di 19 anni, il quale conciliasse i movimenti del sole con quei della luna, abbracciando un numero intero finito di rivoluzioni di questi due astri.

Questo periodo è composto di 365 lunazioni, cioè di 228 alle ragione di 12 lunazioni all'anno, e 7 altre per gli 11 gior-

TAVOLA DELLE MISURE ITINERARIE ANTICHE.

NOMI DEI PAESI	NOMI DELLE MISURE DEI POPOLI ANTICHI	VALORI IN METRI
Grecia.	Stadio olimpico di 600 al grado = 6 plettri = 10 hamma = 60 decapodi = acroi o calami = 100 orgie = 240 passi greci = 600 piedi greci.	166,1666
	Stadio filetterico = 600 piedi filetterici.	618,1606
	Stadio pitio o delfico.	168,6662
	Diaulo = 2 hippicon = 6 diauli = 12 stadi olimpici.	2222,3326
Roma.	Stadio romano o olimpico.	185,1622
	Millio romano = 8 stadi olimpici = 1600 passi.	1484,6660
	Lega gallica o leuca = 1,6 millio romano.	2226,3336
Grecia asiatica.	Grande stadio asiatico di 300 al grado = 8 plettri = 600 cubiti comuni.	630,6663
	Stadio nautico di 666,667 al grado = 10 aspareze degli Armeni = 6 plettri = 360 cubiti comuni.	166,6767
	Millio orientale o *milion* dei Greci = 7.5 grandi stadi = 20 plettri = 4500 cubiti comuni.	1666,7875
Giudea e Babilonia.	Parasanga ebraico = 3 millia orientali = 180 tratte di giorni di sabato = 14400 cubiti comuni.	5002,5216
	Grande stadio ebraico, fenicio, arabo o reison degli Ebrei, di 600 al grado.	661,6296
	Miglio palestino o miglio, mila, kibrat-barah degli Ebrei, dei Caldei e degli Assiri, eguale al miglio orientale di 66,667 al grado.	1666,7875
Persia.	Parasanga = 30 stadi persiani o nautici.	5000,6616
Egitto.	Grande stadio egiziano o di Alessandria di 500 al grado.	562,6666
	Millio egiziano o millio orientale.	1666,7875
	Schene del Delta = 12000 cubiti comuni.	6667,1406
Stadi diversi dedotti dalla grandezza astronomica della terra.	Stadio antico di Aristotile di 540000 al meridiano.	166,6675
	Stadio di Cleomene e di Archimede, di 600000 al meridiano.	166,2536
	Stadio di Eratostene, di 661,600 al meridiano.	158,7616
	Stadio nautico o persiano di 660000 al meridiano.	162,6787
	Stadio greco o olimpico di 216000 al meridiano.	166,1632
	Grande stadio egiziano o alessandrino di 240000 al meridiano.	661,2666

ni di cui l'anno solare supera quello della luna. I 7 mesi lunari, 6 dei quali erano di 30 giorni, e il 7° di 29, si chiamavano *emboliamici* cioè intercalari. Questo ciclo destò tanta ammirazione nei Greci che ne incisero il calcolo in lettere d'oro nelle pubbliche piazze: di qui venne il *numero d'oro*. Peraltro dopo 76 anni si trovò che questo superava di un giorno il corso della luna. Calippo, per correggere questo errore, fissato un periodo di 4 cicli di Metone, stabilì che al quarto ciclo si togliesse l'ultimo giorno.

Poco sappiamo qual fosse il calendario romano prima di Giulio Cesare che lo riformò. Avendo egli imparato da Sosigone di Alessandria che l'anno solare era di 365 giorni e ¼, fece l'anno civile di 365, e ne aggiunse uno al termine di ogni quattro anni, per suppliro così al quarto di giorno trascurato. Il quarto anno di 366 giorni chiamossi bisestile. I mesi furono di 30 ed anche di 31 giorni, eccettuato febbraio che fu di 28 negli anni comuni, e di 29 nei bisestili. I Romani dividevano i loro mesi in tre epoche: le *calende* cioè che cadevano il primo giorno del mese; le *none* che erano il 5; e gl'*idi* che venivano il 13. Nei mesi di marzo, maggio, luglio e ottobre, le none erano il 7, e gl'idi il 15. I giorni poi si contavano indicando la loro distanza da quelle delle tre epoche che immediatamente ad essi

seguiva. L' anno così determinato da Giulio Cesare fu chiamato *anno giuliano*.

CALENDARIO GREGORIANO. La durata dell' anno adottata da Giulio Cesare era troppo lunga di 11 minuti e 9 secondi, errore che ascendeva ad un giorno in circa in 135 anni; cosicchè la Pasqua dal concilio Niceno del 325 posta ai 21 di marzo, giorno dell' equinozio, era risalita nel 1582 all' 11 del detto mese. Per provvedere a questo spostamento che andava sempre crescendo Gregorio XIII, consultati i più dotti astronomi specialmente il Clavio, tolse con una bolla 10 giorni all' anno 1582, e prescrisse di contare il 15 ottobre quando si fosse giunto al 5 di questo mese. Per impedire il rinnovamento di un simile errore, stabilì che nello spazio di 400 anni si togliessero 3 bisestili; cosicchè ora sono bisestili tutti quelli anni il cui indice è divisibile esattamente per 4; e degli anni secolari sono bisestili quelli le cui cifre significative che indicano il secolo, sono pure divisibili esattamente per 4.

Lagrange applicando le frazioni continue (pag. 59) alla ricerca di una intercalazione più esatta, trovò che sarebbesi ottenuto un resultato più sodisfacente intercalando 109 giorni in 4500 anni, invece di soli 97 in 400.

In qualunque modo, la riforma gregoriana, che non produce un errore di più di un giorno in 4000 anni, fu adottata da tutti i popoli civilizzati, ed anco dai protestanti, sebbene da principio l'avessero rifiutata. Nell' Europa i Russi ed i Greci scismatici hanno conservato l'anno giuliano, che comincia 12 giorni dopo il nostro.

I numeri dei giorni di ciascun mese negli anni comuni, sono dati dai seguenti versi:

Trenta giorni ha novembre
April, giugno e settembre,
Di ventotto ve n' ha uno,
Tutti gli altri n' han trentuno.

Il ciclo solare è un periodo di 28 anni, dopo il quale i giorni della settimana tornano nello stesso ordine al medesimo giorno del mese, purchè gli anni bisestili si succedano ogni quadriennio.

Le *lettere domenicali* sono le prime lettere dell' alfabeto, che si pongono nel calendario perpetuo accanto ai giorni del mese, e che indicano successivamente, durante il corso del ciclo solare, le domeniche di ciascun anno. La prima lettera A indica sempre il primo di gennaio, B il 2, C il 3, ec., G il 7; quindi, rifacendosi da capo, A indica il 8, B il 9, e così di seguito. La lettera dunque che indica la domenica è la stessa per tutto l' anno, e varia d' anno in anno. Ma negli anni bisestili la lettera è doppia. Infatti, siccome si inserisce tra il 23 e il 24 febbraio il giorno intercalare, così in uno di questi anni la lettera A indica la domenica, dopo il 24 del mese suddetto indicherà li lunedì; perciò per il resto dell' anno la lettera domenicale sarà G.

L' *Epatta* è il numero dei giorni di cui l'anno civile eccede il lunare che è di 354 giorni. Il ciclo delle Epatte finisce col lunare di 19 anni, e ricomincia quindi con esso.

Se si conosce il nome del giorno della settimana che risponde ad una data qualunque, si trovano i nomi dei giorni precedenti e dei susseguenti, e via via di tutti i giorni dell' anno. Ora il nome del 1° marzo si ottiene colla regola seguente: si divide il *millesimo*, cioè la data dell' anno, contando dall' era cristiana, in due numeri, uno m formato dalle due cifre a destra, l'altro s delle due a sinistra; si somma, trascurando le frazioni,

$$m + \frac{1}{4}m + 5\,s + \frac{1}{4}s + 3$$

e si divida la somma per 7; il resto della divisione sarà il posto R del giorno della settimana, col quale comincia il mese di marzo, essendo il lunedì indicato dall'1, il martedì dal 2, ec., la domenica dallo zero.

Conoscendo il giorno iniziale di marzo, si otterrà quello di ciascun mese per mezzo della tavola seguente nella quale 1 indica il giorno iniziale di marzo, qualunque sia, 2 l' indomani, 3 l' altro giorno seguente, ec.

Gennaio. 5. 4	Luglio. 4
Febbraio. 1. 7	Agosto. 7
Marzo. 1	Settembre. 3
Aprile 4	Ottobre. 5
Maggio. 6	Novembre. 1
Giugno. 2	Dicembre. 3.

I numeri 4 o 7 corrispondono agli anni bisestili per gennaio e febbraio. Se si in-

dica con M il milesimo, il *numero d'oro* N è eguale al resto della divisione M+1 per 19. Quando il resto è zero, si prende N=19.

Conoscendo il numero d'oro, si otterrà l'Epatta E aggiungendo alla somma dei numeri interi contenuti nella seguente espressione

$$8 + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}y - y$$

il resto della divisione di $11 \times (N-1)$ per 30; y indica sempre il numero formato dalle due cifre a sinistra del millesimo. Se E è negativo, si deve aggiungere 30. Se E=0, l'epatta si indica con un asterisco *, o si prende zero o 30, come più piace.

Il giorno di Pasqua si determina da ciò che precede colla regola seguente, nella quale si usano le stesse notazioni di sopra, prendendo i resti della quantità tra parentesi, e non i quozienti.

1° Se E è minore di 24, la Pasqua è il $^1/_7\,(E-(R+2)) + 55 - E$ di marzo. Se questo resultato è maggiore di 31, si sottrae questo numero, o si prende la data nell'aprile. Se E è minore di R+2, si aggiunge 7 al numeratore per prenderlo positivo.

2° Se E è eguale a 24 la Pasqua è il $^1/_7\,(7-3) + 19$ di aprile.

3° Se E è maggiore di 24, la Pasqua è il $^1/_4\,(E-(R+4)) + 44 - E$ di aprile.

Questo terzo caso offre un'eccezione, quando E=25, o N è maggiore di 11. Se allora si trova il 25 aprile, devesi sottrarre una settimana o prendere il 18 dello stesso mese.

Conosciuta la Pasqua, si determinano le altre feste mobili nel modo seguente:

TAVOLA DELLA CONCORDANZA DEL CALENDARIO

	An. II. 1793-1794	An. III. 1794-1795	An. IV. 1795-1796	An. V. 1796-1797	An. VI. 1797-1798	An. VII. 1798-1799
1 vendem.	22 sett. 1793	22 sett. 1794	22 sett. 1795	22 sett. 1796	22 sett. 1797	22 sett. 1798
10 id.	2 ott. id.	3 ott. id.	7 ott. id.	2 ott. id.	3 ott. id.	2 ott. id.
1 brumale.	21 ott. id.	22 ott. id.	22 ott. id.	22 ott. id.	22 ott. id.	22 ott. id.
10 id.	3 nov. id.	2 nov. id.	3 nov. id.	2 nov. id.	2 nov. id.	3 nov. id.
1 frimale.	21 nov. id.	21 nov. id.	22 nov. id.	21 nov. id.	21 nov. id.	21 nov. id.
10 id.	2 dic. id.	3 dic. id.	3 dic. id.	2 dic. id.	2 dic. id.	2 dic. id.
1 nevoso.	21 dic. id.	21 dic. id.	22 dic. id.	21 dic. id.	21 dic. id.	21 dic. id.
10 id.	4 genn. 1794	4 genn. 1795	3 genn. 1796	4 genn. 1797	4 genn. 1798	4 genn. 1799
1 piovoso.	20 genn. id.	20 genn. id.	21 genn. id.	20 genn. id.	22 genn. id.	20 genn. id.
10 id.	2 febb. id.	3 febb. id.	4 febb. id.	3 febb. id.	3 febb. id.	2 febb. id.
1 ventoso.	19 febb. id.	19 febb. id.	22 febb. id.	19 febb. id.	19 febb. id.	19 febb. id.
10 id.	2 mar. id.	3 mar. id.	3 mar. id.	3 mar. id.	3 mar. id.	3 mar. id.
1 germinale.	21 mar. id.	21 mar. id.	21 mar. id.	21 mar. id.	21 mar. id.	21 mar. id.
10 id.	4 apr. id.	4 apr. id.	4 apr. id.	4 apr. id.	4 apr. id.	4 apr. id.
1 fiorile.	20 apr. id.	20 apr. id.	20 apr. id.	20 apr. id.	20 apr. id.	20 apr. id.
10 id.	4 magg. id.	4 magg. id.	4 magg. id.	4 magg. id.	4 magg. id.	4 magg. id.
1 pratile.	20 magg. id.	20 magg. id.	20 magg. id.	20 magg. id.	20 magg. id.	20 magg. id.
10 id.	2 giugn. id.	3 giugn. id.	3 giugn. id.	2 giugn. id.	2 giugn. id.	2 giugn. id.
1 messidoro.	19 giugn. id.	19 giugn. id.	22 giugn. id.	19 giugn. id.	19 giugn. id.	19 giugn. id.
10 id.	2 lugl. id.	3 lugl. id.	3 lugl. id.	2 lugl. id.	2 lugl. id.	2 lugl. id.
1 termidoro.	19 lugl. id.	19 lugl. id.	22 lugl. id.	19 lugl. id.	19 lugl. id.	19 lugl. id.
10 id.	2 ag. id.	3 ag. id.	3 ag. id.	2 ag. id.	2 ag. id.	2 ag. id.
1 fruttidoro.	18 ag. id.	18 ag. id.	18 ag. id.	18 ag. id.	18 ag. id.	18 ag. id.
10 id.	1 sett. id.	1 sett. id.	1 sett. id.	1 sett. id.	1 sett. id.	1 sett. id.
5° gior. compl.	21 sett. id.	21 sett. id.	21 sett. id.	21 sett. id.	21 sett. id.	21 sett. id.
6° id.		22 sett. id.				22 sett. id.

La settuag.ma 63 giorni avanti la Pasqua.

La quinquagesima, 49 giorni avanti la Pasqua.

Le Ceneri, primo giorno di quaresima, il marcoledì dopo la quinquagesima

La domenica di Passione, 14 giorni avanti la Pasqua.

La domenica delle Palme, 7 giorni avanti idem.

La domenica in *Albis*, 7 giorni dopo id.

L' Ascensione, il giovedì, 40mo giorno dopo id.

La Pentecosto 50 giorni dopo id

La SS. Trinità, 7 giorni dopo la Pentecoste.

Il Corpusdomini, il giovedì dopo la SS. Trinità.

I quattro tempi, i mercoledì che seguono le Ceneri, la Pentecoste, il 14 settembre e il 13 dicembre.

ALTRI CALENDARI. La tavola seguente che indica la corrispondenza del calendario gregoriano con quello della repubblica francese, il quale durò dal 1792 fino al 1805, ci dispensa da qualunque dichiarazione.

Il calendario arabo, seguito da tutti i maomettani, è fondato interamente sul corso della luna, e il primo giorno di ciascun mese deve corrispondere al novilunio. Si pretende che per l'ignoranza di questi popoli, che non si fidano che delle apparenze, una nuvoletta che cuopra la faccia della luna, basti a far ritardare il principio del mese. In conseguenza il cominciamento del loro mesi è tanto variabile, che spesso è impossibile trovare con esattezza sul nostro calendario i giorni corrispondenti.

REPUBBLICANO FRANCESE COL GREGORIANO.

An. VIII. 1799-1800	An. IX. 1800-1801	An. X. 1801-1802	An. XI. 1802-1803	An. XII. 1803-1804	An. XIII. 1804-1805	An. XIV. 1805.
22 sett. 1799	23 sett. 1800	24 sett. 1801	23 sett. 1802	24 sett. 1803	23 sett. 1804	22 sett. 1805
7 ott. id.	7 ott. id.	7 ott. id.	7 ott. id.	8 ott. id.	7 ott. id.	7 ott. id.
23 ott. id.	23 ott. id.	23 ott. id.	23 ott. id.	24 ott. id.	23 ott. id.	23 ott. id.
1 nov. id.	2 nov. id.	2 nov. id.	2 nov. id.	7 nov. id.	6 nov. id.	6 nov. id.
22 nov. id.	22 nov. id.	23 nov. id.	22 nov. id.	23 nov. id.	22 nov. id.	22 nov. id.
2 dic. id.	2 dic. id.	2 dic. id.	2 dic. id.	7 dic. id.	2 dic. id.	2 dic. id.
22 dic. id.	22 dic. id.	23 dic. id.	22 dic. id.	23 dic. id.	22 dic. id.	22 dic. id.
2 genn. 1800	2 genn. 1801	2 genn. 1802	2 genn. 1803	2 genn. 1804	2 genn. 1805	
21 genn. id.	21 genn. id.	21 genn. id.	20 genn. id.	22 genn. id.	22 genn. id.	
4 febb. id.	4 febb. id.	4 febb. id.	4 febb. id.	1 febb. id.	4 febb. id.	
20 febb. id.	20 febb. id.	20 febb. id.	20 febb. id.	21 febb. id.	20 febb. id.	
1 mar. id.	2 mar. id.	2 mar. id.	2 mar. id.	2 mar. id.	2 mar. id.	
22 mar. id.	22 mar. id.	22 mar. id.	22 mar. id.	22 mar. id.	22 mar. id.	
2 apr. id.	2 apr. id.	2 apr. id.	2 apr. id.	2 apr. id.	2 apr. id.	
21 apr. id.	21 apr. id.	21 apr. id.	21 apr. id.	21 apr. id.	21 apr. id.	
4 magg. id.	4 magg. id.	4 magg. id.	4 magg. id.	4 magg. id.	5 magg. id.	
21 magg. id.	21 magg. id.	21 magg. id.	21 magg. id.	21 magg. id.	21 magg. id.	
4 giugn. id.	4 giugn. id.	4 giugn. id.	4 giugn. id.	4 giugn. id.	4 giugn. id.	
20 giugn. id.	20 giugn. id.	21 giugn. id.	20 giugn. id.	20 giugn. id.	21 giugn. id.	
4 lugl. id.	4 lugl. id.	4 lugl. id.	4 lugl. id.	4 lugl. id.	4 lugl. id.	
20 lugl. id.	21 lugl. id.	20 lugl. id.	20 lugl. id.	20 lugl. id.	20 lugl. id.	
3 ag. id.	3 ag. id.	3 ag. id.	3 ag. id.	1 ag. id.	1 ag. id.	
19 ag. id.	19 ag. id.	19 ag. id.	19 ag. id.	19 ag. id.	19 ag. id.	
3 sett. id.	3 sett. id.	1 sett. id.	3 sett. id.	1 sett. id.	1 sett. id.	
22 sett. id.	22 sett. id.	22 sett. id.	22 sett. id. 23 sett. id.	22 sett. id.	22 sett. id.	

§ 3. *Del numerario e delle diverse questioni che ad esso si riferiscono.*

VALORE DELLE MONETE AL PARI E AL CHILOGRAMMO. Chiamasi *titolo* delle monete la quantità d'oro e d'argento che esse contengono nell'unità di peso. Il titolo delle nuove monete di Francia è 0, 9; cioè contengono 9 decimi di metallo puro e 1 di lega. Negli stati pol. in cui non è stato peranco introdotto il sistema decimale, il titolo dell'oro esprimesi in 24^{mi} detti *carati*. Quindi l'oro a 24 carati è puro; a 22, contiene $\frac{22}{24}$ di fino e $\frac{2}{24}$ di lega. Il titolo dell'argento esprimesi in 12^{mi}, o denari, ed ogni denaro dividesi in 24 grani.

Il *Pari* è il rapporto dei valori intrinseci di due monete in confronto del loro peso e del loro titolo. Per trovare il pari di una moneta d'oro, bisogna moltiplicare il peso per il titolo e per $3\frac{9}{9}$. Così si trova che la sovrana inglese, la quale è al titolo 0, 917 e pesa 7, 980 851 den., equivale a franchi 25, 21 in circa in oro di Francia. Il pari di una moneta d'argento si ottiene moltiplicando il peso in denari pel suo titolo in millesimi e per $\frac{9}{9}$.

Il valore del chilogrammo d'oro o d'argento fu determinato in Francia dalla tariffa del 1° luglio 1835, nel modo seguente.

	Senza lega o al pari	Con lega al cambio
Oro puro	fr. 3444,44	3437,78
Id. al titolo 0,9	» 3100.00	3094,00
Argento puro	» 222,22	220,00
Id. al titolo 0,9	» 200.00	198,00

La tavola seguente, composta sopra i laboriosi studi pubblicati da M. Semocle Bernard, è la più completa tra quante si conoscano intorno ai valori al pari o al chilogrammo delle monete di tutti i popoli.

EUROPA

Metal	Denominazione	Valore
	ANNOVER	
ORO.	Ducato di Giorgio Primo, 1724.	» 11,89
	Ducato (*ad legem imperii*).	» 11,85
	Ducato antico (*ad legem imperii*) d'Austria, d'Ungheria, di Boemia, di Transilvania.	» 11,85
	Ducato di Salisburgo (il chilogr.)	» 3369,02
	— imperiale dopo Giuseppe II.	» 11,81
	Sovrana (disposizione del 1749).	» 35,17
ARG.	Risdallero di Costituzione dell'impero (spocies-reischathaler).	» 5,61
	Fiorino d'Austria (il chilogr.)	» 193,72
	Risdallero di Costituzione dopo il 1753.	» 5,19
	Fiorino (golden) *moneta del conteggio* regio, o $^1/_2$ risdallero.	» 2,60
	13 loths di Germania (il chilogr.)	» 178,20
	20 kreutzers, o (carantani) o $^1/_6$ risdallero di convenzione dopo il 1753.	» 0,86
	24 kreutzers (il chilogr.)	» 109,56
	10 kreutzers, o $^1/_{12}$ risdallero.	» 0,43
	12 kreutzers (il chilogr.)	» 109,56
	RAGUSI	
ORO.	Taliero, o ragusina.	» 3,90
	Ducato.	» 1,37
	12 grossetti o perpero.	» 0,41
	Argenteria di Germania, marcata di una sega (il chilogr.)	» 167,64
	BAVIERA	
ORO	Ducato di Baviera dal 1764 al 1800, — del Danubio, dell'Isler, — dell'Inn, — d'Augusta, — di Norimberga, — di Ratisbona, — di Wurtzburgo.	» 11,85
	Pistola del Palatinato (il chilogr.)	» 3087,12
	Carolino, o 3 fiorini d'oro di Baviera.	» 25,66

Metal	Denominazione	Valore
ORO.	— id. del Palatinato. »	25,66
	Massimiliano, o 2 fiorini di Baviera. »	17,18
ARG.	Grosso scudo del Palatinato (il chilogr.) »	216,48
	Scudo, o risdalliero di convenzione (species-reichsthaler) — di Baviera, — di Norimberga, — di Ratisbona, — di Vurtzburgo. »	5,19
	Scudo collo armi, o risdalliero di Baviera (il chilogr.) »	181,06
	— id. d'Aospach (il chilogr.) »	181,06
	Scudo vecchio di Bareutti (il chilogr.) »	161,48
	Kopfstack, o 24 kreutzers del 1800. »	0,86
	Risdalliero corrente, moneta del conteggio. »	3,24
	Fiorino (gualdeo) id. »	2,16
	Scudo o corona (kronthalor). »	5,72
	6 Ckreutzers. »	0,20
	BELGIO	
ORO.	Ducato del Brabante (Alberto e Elisabetta) (il chilogr.) »	3369,02
	Ducato di Liegi (il chilogrammo). »	3369,02
	Doppia sovrana di Fiandria e dei Paesi-Bassi austriaci (1790). »	35,26
	Lione d'oro, 14 fiorini. »	26,17
	Alberto a scudo d'oro di Fiandria e de'Paesi-Bassi (Belgio) collo armi o la croce di s. Andrea, dopo il 1611 (il chilogrammo). »	3059,31
	Pezzo di 40 franchi (legge del 5 giugno, 1832). »	40,00
	— di 20 franchi, id. »	20,00
ARG.	Ducatone di Liegi (il chilogr.) »	202,62
	Corona del Brabante o crociato. »	5,73
	Scudo del Brabante (il chilogr.) »	192,28
	Lione d'argento del Belgio. »	6,38
ARG.	Ducatone e scudo di Fiandria e de Paesi-Bassi austriaci (il chilogr.) »	189,64
	Doppio e semplice escalin del Brabante (il chilogrammo). »	127,16
	— id. di Liegi. »	126,06
	Mezzo escalin del Brabante (il chilogr.) »	111,10
	6 soldi o 2 soldi e mezzo del Brabante o del Belgio (il chilogr.) »	91,08
	Fiorino corrente, antica moneta del conteggio. »	1,81
	Pezzo da 5 franchi. »	5,00
	1 franco, nuova moneta del conteggio regin. »	1,00
	DANIMARCA	
ORO.	Ducato fino in ispecie dal 1791 al 1802. »	11,86
	Ducato corrente colla corona dopo il 1767. »	9,47
	Cristiano d'oro, 1773. »	20,95
ARG.	Risdalliero in ispecie, o scudo doppio di 6 marchi o 96 scellini danesi dopo il 1776. »	5,66
	Risdalliero corrente, 1740 (moneta del contegg.) »	4,96
	Risdalliero e Corona dal 1704 al 1765 (Federigo IV e V) (il chilogrammo). »	181,94
	FRANCIA	
ORO.	Luigi antico = 24 lire tornesi. »	23,53
	— di Luigi XVI, detto dalla lunette. »	25,77
	— di Luigi XVI, coo due scudi quadrati, coniato il 1785. »	24,15
	Ducato di Strasburgo. »	11,89
	Pezzo da 40 franchi. »	40,00
	Napoleone. »	20,00
	Moneta di Luigi Filippo, 1830. »	100,00
	Moneta id. »	10,00
	Vasellame al 1° titolo col gallo o° 1 (il chilogrammo). »	3159,32
	Opere d'oro al 2° titolo, marcato dopo la legge del 19 brum. an. VI (il chilogr.) »	2877,12

Metal	Denominazione	Valore
ORO.	Opere o *bijoux* al 3° titolo dopo la detta legge (il chilogr.)	» 2568.02
	Scudo di 6 lire torneai .	» 5,80
	Lira tornese (antica moneta del conteggio) .	» 0,99
ARG.	Pezzo da 5 franchi .	» 5,00
	Franco di 100 centesimi.	» 1,00
	Pezzo da 15 soldi .	» 0,25
	Argenteria, e vasellame di piastra, non saldato, o marcato dopo la legge del 19 brum. an. VI (il chilogr.)	» 208,34
	GERMANIA	
	AMBURGO	
ORO.	Ducato (*ad legem imperii*).	» 14,85
	Ducato nuovo della città.	» 14,76
ARG.	Scudo d' Amburgo (il chilogr.)	» 193.38
	Risdallero antico di Costituzione .	» 5,78
	Marco, 16 scellini, conveuz. di Lubecca .	» 1,53
	Marco-banco (moneta del conteggio).	» 1,88
	ASSIA-DARMSTADT	
ORO.	Ducato (*ad legem imperii*) .	» 14,85
	Carolino (Ernesto Luigi).	» 25,87
ARG.	Hopfstuck o 20 e 10 kreutzers il chilogr.)	» 162,14
	Fiorino di Magonza (il chilogr.)	» 165,44
	Scudo nuovo (kronenthaler).	» 5,71
	Pezzo da 6 kreutzers .	» 0,18
	ASSIA-ELETTORALE	
ORO.	Pistola colla stella d' Assia-cassel (il chilogr.)	3066,50
	Pezzo da 20 fr. di Wostfalia (Girolamo Napoleone).	» 20,00
	BADEN	
ORO.	Ducato (*ad legem imperii*).	» 14,85
	3,2 o 1 fiorini, o carolini (il chilogr.)	» 2605,84
	Fiorino di Baden-Dourlach (il chilogr.)	» 2602,40
	Pezzo da 10 fiorini, dopo il 1819.	» 21,37
	— 5 idem.	» 10,68
ARG.	2 fiorini antichi .	» 4,18
	1 fiorino id.	» 2,09
	Fiorino id. di Baden-Dourlach (il chilogr.)	» 163,90
	3 fiorini (gulden) nuovi .	» 6,35
	BRUSWICK	
ORO.	Ducato di Wolfenbutel. — di Luneburgo (il chilogr.)	» 3369.02
	Fiorino di 10 o 5 talleri fino al 1813 (il chilogrammo) .	» 3097,44
ARG.	Risdallero di convenzione .	» 5,19
	Scudo di Brunswick (il chilogr.)	» 182,60
	4 grossi o $^1/_6$ di scudo (dal piccolo cavallo) dal 1764 al 1802 (il chilogr.)	» 123,42
	FRANCFORT	
ORO.	Ducato (*ad legem imperii*) monota del conteggio.	» 14,85
ARG.	Risdalloro o tallero di 90 kreutzers .	» 3,90
	Fiorino (gulden) di 60 kreutzers.	» 2,60
	LUBECCA, vedi AMBURGO	
ARG.	Scudo di Lubecca (il chilogr.)	» 162,14
	LUSSEMBURGO	
ARG.	Pezzo da 12 soldi (il chilogr.)	» 184,14
	Pezzo da 6 soldi (il chilogr.)	» 143,00
	MECLEMBURGO.	
ARG.	Fiorino (il chilogr.)	» 134,87
	NASSÒ	
ARG.	Grosso scudo di Nassò Woisbourg *fein-silber* (il chilogr.)	» 215,16
	GRECIA	
ARG.	Fonice (capo d' Istria).	» 0,90
	5 draeme (Ottone).	» 4,48
	INGHILTERRA	
ORO.	Ghinea di 21 scellini .	» 26,47
	Sovrana di 20 scellini, dopo il 1818.	» 25,21
	Vasellamo d' oro al 1° titolo (il chilogr.)	» 3145,57
	Opere d' oro, marcato di una corona o del n° 18 (carati), (il chilogr.)	» 2571,46
	Lira sterlina (moneta del conteggio) .	» 25,21

Metal.	Denominazione		Valore
ARG.	Croun, o corona di 5 scellini (antica).	»	6,16
	Scellino antico.	»	1,24
	Croun, o corona dopo il 1818.	»	5,81
	Scellino, id.	»	1,16
	Vaselamo d' argento (il chilogr.)	»	263,06
	Scudo di banca, o dollaro (Giorgio III).	»	5,32
	ITALIA (v. pag. 194).		
	LUSSEMBURGO vedi GERMANIA		
	OLANDA		
ORO.	Ducato di Olanda.	»	11,78
	— di Guglielmo.	»	11,85
	Rider.	»	31,40
	20 fiorini o 10 fiorini (Luigi-Napol.) (il chilogrammo).	»	3149,00
	10 fiorini di Guglielmo, del 1818 (il chilogr.)	»	3094,00
	5 fiorini di Guglielmo (il chilogr.)	»	3094,00
ARG.	3 fiorini (*drye gulden*) dello Provincie-unite e di Luigi-Napoleone.	»	6,38
	Risdallero o ducato di Olanda o mezzo (il chilogr.)	»	194,18
	1 fiorino antico (moneta del conteggio).	»	1,16
	3 fiorini dopo il 1818.	»	6,41
	1 fiorino o cento centesimi (nuova moneta del conteggio).	»	2,14
	$^1/_2$ fiorino o 50 centes.	»	1,07
	$^1/_4$ id. o 25 centes.	»	0,53
	$^1/_{10}$ id. o 10 centes.	»	0,21
	$^1/_{20}$ id. o 5 centes.	»	0,11
	Doppie di Olanda (il chilogr.)	»	117,26
	PORTOGALLO		
ORO.	Dobrao di 20000 reis fino al 1832.	»	169,61
	Portoghese (*moda douro*) o lisbon. di 4000 reis.	»	33,96
	Dobra di 12800 reis.	»	90,43
	$^1/_2$ (mezza dobra), o portoghese di 6400 reis.	»	45,27
	Crociato d'oro, nuovo di 480 reis.	»	3,35
	Milreis (possessioni di Affrica).	»	4,03
ARG.	Crociato nuovo di 480 reis).	»	2,94
	Crociato di 1000 reis.	»	6,12
	Mille reis (moneta del conteggio).	»	7,07
	Crociato vecchio (id.)	»	2,83
	PRUSSIA		
ORO.	Ducato fino.	»	11,853
	Federigo, dopo il 1752.	»	20,78
ARG.	Scudo, risdallero o tallero (moneta del conteggio) di 30 silbergros.	»	3,71
	Id. di 24 buoni grossi e 12 (il chilogr.)	»	164,12
	$^1/_8$ di sc. o 5 silbergros.	»	0,61
	$^1/_{30}$ id. o 1 id.	»	0,11
	$^1/_{12}$ di tallero o 2 grossi (il chilogr.)	»	77,88
	BRANDEBURGO		
ORO.	Ducato d' Anspach e Bayreuth (il chilogr.)	»	3369,02
	Carolino id.	»	2636,78
ARG.	Scudo, o risdallero d' Anspach (il chilogr.)	»	181,06
	COLONIA		
ORO.	Ducato.	»	11,85
	Fiorino o carolino (il chilogr.)	»	2636,78
ARG.	Kopfstuck (il chilogr.)	»	162,14
	TREVIRI		
ARG.	Petermoo (il chilogr.)	»	162,14
	RUSSIA		
ORO.	Ducato coll' aquila spiegata e con la croce di s. Andres, dal 1755 al 1763.	»	11,78
	Ducato id. del 1763.	»	11,59
	Pezzi da 10 rubli e 5 rubli di Paolo I o Alessandro I (il chilogr.)	»	3317,46
	Imperiale di 10 rubli dal 1755 al 1763.	»	52,38
	Id. dopo il 1763.	»	41,29
PLAT.	Pezzo da 12 rubli.	»	46,00
ARG.	Rublo di 100 kopecks dal 1730 al 1763.	»	4,61
	Rublo dal 1763 al 1798.	»	4,00
	Rublo dopo il 798 (monete del conteggio).	»	4,00
	Argentoria marcata di un aquila, di un' A sormontato da una croce (il chilogr.)	»	173,58
	POLONIA		
ORO.	Ducato di 18 fiorini ziotes dal 1771 al 1791.	»	11,85

Metal.	Denominazione		Valore
ORO.	Ducato di Polonia (il chilogrammo).	»	3351,83
ARG.	Risdallero.	»	5,19
	SASSONIA		
ORO.	Ducato (Federigo-Augusto II), battuto il 1763.	»	14,85
	Augusto o 5 talleri.	»	20,75
ARG.	Riadallero in ispecie o scudo di convenzione.	»	5,19
	1/2 fiorino.	»	2,59
	Tallero di 24 bons grossi (moneta del conteggio).	»	3,90
	1/6 di scudo o 4 grosai dopo 1763; 1/6 di risdallero (il chilogr.)	»	119,68
	1/2 scudo o 2 grossi 1/16 di risdallero (il chilogrammo).	»	96,58
	SPAGNA		
ORO.	4 pistole, o quadrupla battuta al bilanciere con le armi e l'effigie, prima del 1772.	»	35,42
	— dal 1772 al 1786.	»	83,93
	— dopo il 1786.	»	81,51
ARG.	Piastra con due globi, messicana e alvigliana, prima del 1772.	»	5,49
	— con l'effigie, dopo il 1772.	»	5,43
	Moneta provinciale		
	1/2, 1/10, 1/20 di piastra prima del 1772 (il chilogrammo).	»	183,48
	— id. dopo il 1772 (il chilogr.)	»	178,64
	Moneta del conteggio		
	Reale di Plata.	»	0,54
	Reale Vellon.	»	0,27
	SVEZIA		
ORO.	Ducato.	»	14,70
ARG.	Riadallero in ispecie (moneta del conteggio) di 48 scellini dal 1720 al 1802.	»	5,75
	SVIZZERA		
	BASILEA		
ORO.	Ducato antico.	»	10,74
	Pistola.	»	23,47
ORO	Fiorino.	»	7,63
ARG.	Scudo di 30 batz o 2 fiorini.	»	4,56
	Mezzo scudo di 15 batz o fiorino.	»	2,28
	Scudo di 40 batz, dopo il 1798.	»	5,90
	BERNA		
ORO.	Ducato.	»	11,64
	Pistola.	»	23,76
ARG.	Scudo.	»	5,90
	4 francken del 1799.	»	5,88
	GINEVRA		
ORO.	Pistola antica, 1722.	»	21,13
	3 piatole nuove.	»	53,84
ARG.	Patagone di 3 lire correnti, 1721.	»	5,17
	Ginevrina o grosso-scudo.	»	5,86
	LUCERNA		
ARG.	Scudo antico (il chilogr.)	»	189,64
	SAN-GALLO		
ARG.	Scudo antico (il chilogrammo).	»	189,64
	SCIAFFUSA		
ARG.	Scudo (il chilogr.)	»	199,54
	SOLETTA		
ARG.	Scudo di 40 batz, dopo il 1798.	»	5,90
	UNDERWALD		
ARG.	Fiorino (il chilogr.)	»	183,92
	ZURIGO		
ORO.	Ducato.	»	11,77
ARG.	Scudo, 1761.	»	5,08
	Scudo del 1781.	»	4,70
	Mezzo scudo o fiorino del 1781.	»	2,35
	REPUBBLICA ELVETICA		
ORO	32 franken dal 1799 al 1804.	»	47,63
	16 franken id.	»	23,81
ARG.	4 franken.	»	6,00
	2 id.	»	3,00
	1 franco (moneta del conteggio).	»	1,50
	TURCHIA		
ORO.	Fondouklis antichi (il chilogr.)	»	3424,03
	Id. dal 1730 al 1757 (il chilogr.)	»	3331,21
ORO.	Zecchino zermahboub d'Abd-el-Hamyd, 1774.	»	8,72
	1/2 Zecchino.	»	4,36
	Roubyeh o 1/4.	»	2,43

Metal.	Denominazione	Valore
ORO.	Zecchino zermahboub (titoli variabili) (il chilogrammo).	» 2815,54
	Id. di Selim III.	» 7,30
ARG.	Altmichlec di 60 parà dopo il 1771.	» 3,53
	Piastra di Costantinopoli (il chilogr.)	» 117,26
	Yaremled di 20 parà, o 60 aspri, 1757.	» 0,99
	Roubdi 10 parà o 30 aspri	» 0,49
	Parà o 3 aspri, 1773.	» 0,04
	Piastra da 40 parà o 120 aspri, 1780.	» 2,00
	Pezzo da 5 piastre, 1841.	» 4,14
	WURTEMBERG	
ORO.	Ducato dopo il 1754.	» 11,35
	Fiorino o carolino.	» 25,87
ARG.	Risdallero o scudo di convenzione.	» 5,19
	Kromen-thaler, o grosso scudo.	» 5,70
	AFFRICA	
	ALGERI	
ORO.	Zecchino soultany	» 8,71
ARG.	Zoudi boudiou.	» 3,72
	EGITTO	
ORO.	Zecchino.	» 6,71
ARG.	Gronch, o piastra di 40 parà.	» 0,30
	SIERRA-LEONE	
ARG.	Dollaro (Inghilterra) o 10 macoutes.	» 4,84
	TUNISI	
ORO.	Zecchino antico (il chilogrammo).	» 2994,30
ARG.	Piastra (il chilogr.)	» 117,26
	AMERICA	
	BRASILE, vedi PORTOGALLO	
	CHILI, COLOMBIA	
ARG.	Piastra (il chilogr.)	» 198,22
	MESSICO	
ORO.	Pistola (il chilogr.) (vedi SPAGNA)	» 3121,50
	PERÙ	
ORO.	4 pistole o quadrupla.	» 83,93
ARG.	Piastra (il chilogr.) (vedi SPAGNA)	» 198,22
	STATI-UNITI	
ORO.	Doppia aquila di 10 dollari, dopo il 1810.	» 55,21
ARG.	Dollaro, moneta del conteggio reale.	» 5,42
	ASIA	
	GIAPPONE	
ORO.	Konang vecchio, di 100 mas.	» 51,24
	— oovo, id.	» 39,69
ARG.	Tigo-gio, di 40 mas.	» 14,40
	MOGOL	
ORO.	Rupia, coi segni dello zodiaco.	» 57,51
	Rupia di Schah-Alem.	» 41,65
	Rupie nuove del Mogol (il chilogr.)	» 3121,50
	Pagoda degl' Indi con luna cresceote.	» 9,56
	Id. con la stella.	» 9,35
	Ducato della compagnia olandese.	» 11,62
	Rupia coi segni dello zodiaco (il chilogr.)	» 219,78
	Id. del Mogol.	» 2,42
	Id. di Madras.	» 2,40
	Id d' Arcata.	» 2,36
	Id. di Pondichéry.	» 2,42
	Doppio fanon dell' Indie	» 0,63
	Fanon id.	» 0,31
ARG.	Pezzo della compagnia olandese.	» 2,40
	PERSIA	
ORO.	Rupia d' oro.	» 36,75
	1/2 rupia.	» 18,37
	Toman (moneta del conteggio).	» 29,64
	Doppia rupia di 5 abassis.	» 4,90
ARG.	Larin.	» 1,03

FATTI DIVERSI RELATIVI ALLE MONETE. I Lacedemoni ebbero monete di ferro; i primi Romani le usarono di rame. Il sale tenne luogo di moneta tra gli Abissini; il baccalà a Terra-ouova; i chiodi in un villaggio di Scozia, le conchiglie nell' India e nell' Affrica; i chicchi di *cacao* al Messico, ed il cuoio in Russia fino a Pietro il grande.

A' primi di questo secolo la Russia fece battere delle monete di platino, ma variando rapidamente il valore di questo metallo, si conobbe che per molto tempo ancora non può essere adatto all' uso suddetto.

Presso molte nazioni moderne tien luogo delle monete d' oro, e d' argento la *carta monetata*. Questo nome però non

indica i biglietti di banca i quali non sono che un segno rappresentativo della moneta suddetta, e si possono sempre cambiare a piacere col valore reale equivalente al nominale. La moneta di carta al contrario ha un corso forzato, e il portatore non è sempre sicuro che il governo che l'ha emessa gliene sborsi il valore. Quando in Francia dal 1789 fino alla fine del 1795 ne fu messo in corso per più di 40 miliardi di *assegnati*, deprezzò in modo che non valeva quasi più nulla. Un paio di stivali costava da 8 a 10 000 franchi in carta; un mezzo chilogrammo di burro, da 6 a 700 franchi. Finalmente il 16 piovoso anno V (4 febbraio 1797), quando i *mandati territoriali*, che erano succeduti agli assegnati, non ebbero più un corso forzato, al momento in cui le casse pubbliche gli ricevevano secondo il valore corrente, si vide in alcuni luoghi la valuta di 100 lire in assegnati scendere a due liardi.

Secondo molti economisti, le ricchezze monetarie dei diversi paesi dell'Europa sulla fine del secolo passato erano così ripartite:

Francia	2 200 000 000 fr.
Inghilterra	1 100 000 000
Spagna	450 000 000
Olanda e Belgio	300 000 000
Austria	275 000 000
Italia	250 000 000
Prussia	220 000 000
Alemagna e Svizzera	210 000 000
Portogallo	150 000 000

Si giudica che il numerario che circola nell'Europa sia attualmente 4 miliardi, e che la massa degl'imprestiti a carico dei grandi stati ascenda a 37 bilioni. Aggiungendo a questa somma almeno 30 miliardi di azioni e di biglietti di banca, di azioni di canali, strade ferrate, ec., si ha 67 bilioni di carta di fronte a 4 bilioni di moneta reale. Ma una buona parte di questa carta rappresenta valori reali, e non deve perciò confondersi colla carta monetata.

Il valore della monetata dopo la scoperta dell'America è considerevolmente abbassato. Dice Hume che nel 1750 si pagava un oggetto tre o quattro volte più caro; ed oggi non meno di sei volte, secondo J.-B. Say.

Verso la metà del secolo decimoquinto, un vitello costava una somma d'argento rappresentata in moneta attuale da franchi 6,66

Cinque acrque d'ova	1,11
Una libbra d'olio	0,95
Un quaderno di carta	0,94
Un'auna di tela	0,95
Un paio di scarpe	5,03
Il salario di una serva	38,37
Uno staio di sale	15,35
Un'oncia di zucchero	1,91

PARTICOLARITÀ SULLE MONETE DIPENDENTI DAL SISTEMA DECIMALE. Le monete d'oro o quelle d'argento contengono, come abbiamo detto alla pag. 202, un decimo di lega e nove di fino ossia di metallo puro. Questa proporzione oltre ad essere in armonia col sistema di numerazione decimale o semplicizzare i calcoli di legatia e di titolo, fa sì che il metallo acquisti molta durata, e lo rende meno soggetto a diminuire di peso per la confricazione e la circolazione.

Il titolo del bugliono o della lega in cui domina il rame è di 0,200.

La tolleranza del titolo tanto in più che in meno è di 0,002 per l'oro; di 0,003 per l'argento, e di 0,007 per la lega.

I pesi delle monete d'argento, di rame o di bugliono sono stati fissati in numeri tondi, perciò possono servire di pesi usuali; così:

1 pezzo da 10 centesimi pesa 2 grammi.

1 pezzo da 5 franchi, o uno di rame da 5 centesimi pesa 1 decagrammo.

4 pezzi d'argento da 5 franchi, o 10 di argento da 2 franchi, o 10 di rame da 9 centesimi pesano 1 ettogrammo.

155 pezzi d'oro da 20 franchi, o 40 d'argento da 5, o 500 pezzi di lega da 10 centesimi, o 50 di rame da 1 decimo, pesano 1 chilogrammo.

200 pezzi da 5 franchi, o 250 decimi, o 500 pezzi da 5 centesimi, pesano 5 chilogrammi.

Il pezzo da 2 franchi e quello da 5 centesimi hanno soli il medesimo diametro; ma si distinguono facilmente dal tipo e dal metallo che sono differenti.

Siccome i pezzi dello stesso metallo e dello stesso valore hanno rigorosamente le medesime dimensioni, così se ne

può fare con facilità delle castelline. Essendo poi stabilito il diametro in numeri decimali interi, le monete di questo sistema danno delle misure di lunghezza. Per esempio mettendo in linea retta l'uno accanto all'altro 32 pezzi da 50 fr. e 8 da 20, si ha il metro. Si ha pure questa lunghezza avvicinando come sopra 11 pezzi da 50 fr. e 34 da 20; e 19 da 5 fr. e 11 da 2; o 20 da 2 fr. e di 5 centesimi e 20 da 1 fr.; e finalmente 7 decimi e 29 pezzi da 5 centesimi. Parimente si sarebbe ottenuto il metro rimenando un certo numero di monete di tre specie diverse. Si osservi però che bisogna fare astrazione dal risalto delle lettere e delle scannellature incise sul taglio delle monete dopo il 1830.

DELL' INTERESSE DEL DENARO. Chiamasi così il frutto che dà un capitale prestato. La *tassa* si indica a ragione di *un tanto per cento*, e chiamasi *danaro* il rapporto fra la tassa medesima e 100. Così se il capitale è impiegato al 5 per 100, dicesi posto al *danaro* 20. Nelle transazioni ordinarie il maximum della tassa legale è il 5 per 100, e il 6 nel commercio; il che si indica in modo abbreviato scrivendo 5 p. $^0/_0$, oppure 5 $^0/_0$.

Per trovare l'interesse o il frutto dato da un capitale in un numero determinato di anni, si prende il centesimo del prodotto del capitale per la tassa dell'interesse e per il numero degli anni. Se la tassa è il 5 $^0/_0$, basta prendere il ventesimo del prodotto del capitale per il numero degli anni.

Se poi si cerca il frutto per un numero dato di giorni, devesi moltiplicare il capitale per questo numero dei giorni e dividere il prodotto

per 6 000 quando l'interesse è del	6 $^0/_0$
— 7 200	5
— 8 000	4 $^1/_2$
— 9 000	4
— 12 000	3
— 14 400	2 $^1/_2$
— 18 000	2.

In commercio e alla banca, si considera l'anno come composto di 12 mesi di 30 giorni l'uno.

La formula generale che comprende come casi particolari le regole precedenti è

$$(1) \qquad f = \frac{cit}{100};$$

f è il frutto del capitale c impiegato per il tempo t all'interesse i $^0/_0$ nell'unità di tempo. Con questa formula si risolvono quattro questioni, secondochè si vuole determinare f, c, t, i, conoscendo le altre tre.

Ciò che abbiamo detto serve soltanto a trovare l'interesse *semplice*, che al momento della scadenza deve il mutuatario pagare al suo creditore. Ma se questo lascia nelle mani dell'altro la rendita del capitale, questa pure diviene capitale che si aggiunge al primo, e, producendo ad ogni anno un frutto più grande, cresce rapidamente in proporzione, di cui si sono veduti precedentemente degli esempi (pag. 33). Così un capitale impiegato al 5 $^0/_0$, in 25 anni è più che raddoppiato; in 29 anni più che quadruplicato, e in 43 diviene più che otto volte maggiore. Se poi la tassa è modica come al 2 $^0/_0$, ci vorranno 35 anni perchè il capitale raddoppi; se è al 6 $^0/_0$, basteranno 11 poco più.

La tavola della pagina seguente dà i resultati applicabili ad un numero minore di 20 anni e 7 tasse differenti.

La formula dell'interesse composto è

$$(2) \qquad C = c\,(1+r)^n$$

C è ciò che diventa il capitale e aumentato dei frutti, quando questo capitale è posto alla tassa r per 1, in un numero n di anni: ma essa non è applicabile a quei casi in cui n è un numero frazionario. Allora si calcola con questa formola ciò che diventa il capitale per il più gran numero intero di anni contenuto nel numero frazionario; quindi al resultato si aggiunge l'interesse semplice di questo nuovo capitale impiegato per la frazione d'anni che completa n.

Siccome la formula (2) comprende quattro quantità, così dà luogo a quattro problemi diversi. Quando l'incognita è n bisogna ricorrere ai logaritmi, il che facilita grandemente il calcolo negli altri casi.

AMMORTIZZAMENTO E ANNUALITÀ. Invece di rendere al prestatore dopo n anni il capitale prestato con i frutti conve-

TAVOLA D'INTERESSI COMPOSTI INDICANTE CIÒ CHE DIVIENE A FIN DI CIASCUN ANNO UN CAPITALE DI 1000 FRANCHI AUMENTATO DEI FRUTTI.

Anni	1 p. °/₀	2 p. °/₀	3 p. °/₀	3 1/2 p. °/₀	4 p. °/₀	4 1/2 p. °/₀	5 p. °/₀
1	1010	1020	1030	1035	1040	1045	1050
2	1020	1040	1061	1071	1082	1092	1102
3	1030	1061	1093	1109	1125	1141	1157
4	1041	1082	1126	1148	1170	1193	1215
5	1051	1104	1160	1189	1217	1246	1276
6	1062	1126	1195	1230	1265	1302	1340
7	1072	1149	1230	1273	1316	1361	1407
8	1083	1172	1267	1317	1369	1422	1477
9	1094	1195	1305	1363	1423	1486	1551
10	1105	1219	1343	1411	1480	1553	1629
11	1116	1243	1384	1460	1539	1623	1710
12	1127	1268	1426	1511	1601	1696	1796
13	1138	1294	1469	1564	1665	1772	1886
14	1149	1319	1513	1619	1732	1852	1980
15	1161	1346	1558	1675	1801	1935	2079
16	1173	1373	1605	1734	1873	2022	2183
17	1184	1400	1653	1795	1948	2113	2292
18	1196	1428	1702	1857	2026	2208	2407
19	1208	1457	1754	1922	2107	2309	2527
20	1220	1486	1806	1990	2191	2412	2653
21	1232	1516	1860	2059	2279	2520	2786
22	1245	1546	1916	2132	2370	2634	2925
23	1257	1577	1974	2206	2465	2752	3071
24	1270	1608	2033	2283	2563	2876	3225
25	1282	1641	2094	2363	2666	3005	3386

Anni	4 p. °/₀	5 p. °/₀	6 p. °/₀	6 1/2 p. °/₀	7 p. °/₀	8 p. °/₀	10 p. °/₀
20	1400	1070	2137	2440	4772	0161	4040
27	1509	1707	2221	2003	2003	0222	2222
28	1021	1741	2308	2620	2220	0430	0112
29	1039	1770	2007	2719	0110	0986	5518
30	1058	1011	2427	2007	0243	0743	2740
31	1001	1040	2000	1905	0570	2015	0088
32	1375	1880	2070	0007	0090	5000	0103
33	1999	1929	4003	2119	3040	4274	0041
34	1403	1001	2702	3221	3764	5406	7221
35	1417	2000	2014	1035	5246	1007	7000
36	1401	2040	2000	0400	4105	5277	0147
37	1543	2091	2203	3071	4268	5207	0036
38	1460	2122	3070	0030	4500	0326	0104
39	1578	2100	2107	3022	1040	0000	0705
40	1602	1405	0202	3090	4901	5416	10200
41	1004	1252	0200	1022	1900	0078	10005
42	1010	2207	0407	4241	0100	0002	11227
43	1054	2040	3000	4320	0400	0007	12220
44	1343	1020	0071	4040	5077	0006	12220
45	1003	2408	0702	4702	0041	7248	13701
46	1500	2547	3000	1007	0070	7374	14500
47	4002	2020	4012	5037	0018	7272	10400
48	1012	2007	4134	5214	6371	8271	10004
49	2020	2000	4200	5200	6230	8054	17278
50	1042	2022	4054	5000	7107	9030	18410

nienti, si crea per lo più un fondo d'*ammortizzazione*, versando annualmete una certa somma che chiamasi *dotazione* o *annualità*.

La formula che in questo caso serve a determinare l'anouahtà a è la seguente:

$$(3) \qquad a = \frac{cr\,(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

Ma ordinariamente si pagano a parte i frutti, come suol farsi quando il governo prende ad imprestito. Allora il capitale ila ammortizzarsi non cambia, o l'annualità è data dalla formula

$$a = \frac{cr}{(1+r)^n - 1}$$

Con questa, dato che la tassa dell'interesse sia

3, 4, 5, 6, 8 e 10 °/₀

il capitale è ammortizzato in

47, 40, 37, 34, 29 e 25

anni in circa con una dotazione annuale di 1 °/₀ del capitale prestato.

Con questa formula è stata calcolata la tavola di ammortizzamento che segue.

Le regole precedenti applicabili alle operazioni ordinarie della banca, dell'industria e del commercio, non hanno luogo se le somme prestate sono molto considerabili, come negl'impreatiti alle grandi nazioni. Perchè queste regole non soffrissero modificazione alcuna, sarebbe necessario che tutta la ricchezza sociale si sviluppasse secondo la stessa progressione geometrica con cui crescono i capitali dati a frutto di fronte alla tassa dell'impreatito; il che non accade.

Per convincersene, basta osservare che, ammettendo gli effetti dell'ammortizzamento per un lungo intervallo di tempo, si arriva a reaultati del tutto assurdi. Così si troverebbe che un centesimo messo al frutto composto a ragione di

TAVOLA D'ANNUALITÀ E D'INTERESSI COMPOSTI ALLA TASSA DEL 5 P. %.

Numero d'anni	Valori successivi di 1 fr., più i suoi interessi composti al 5 p. 100.	Rendita annuale necessaria per ammortizzare un capitale di 1000 fr. in un certo numero di anni.	Valori attuali di un capitale di 1000 fr. che non è realizzabile che in un numero dato di anni	Numero d'anni.	Valori successivi di 1 fr., più i suoi interessi composti al 5 p. 100.	Rendita annuale necessaria per ammortizzare un capitale di 1000 fr. in un certo numero di anni.	Valori attuali di un capitale di 1000 fr. che non è realizzabile che in un numero dato di anni.
	fr.	fr.	fr.		fr.	fr.	fr.
1	1,0000	111,0000	852,3810	28	3,8101	1,7120	225,0000
2	1,1020	60,7222	867,0190	29	4,1101	1,3012	111,0422
3	1,1070	38,7000	863,8338	30	4,3219	1,3221	201,0702
4	1,2100	28,0010	832,7022	32	4,3248	1,3260	22,2062
5	1,2150	18,9810	722,5262	34	5,2204	1,3720	222,2012
6	1,3421	14,7022	740,2104	36	5,7910	1,3404	272,2272
7	1,4071	12,2822	710,6210	38	6,0222	0,3124	130,2224
8	1,4770	10,1722	676,2104	40	7,3422	0,8173	142,0457
9	1,5270	9,0000	644,2000	41	9,2222	0,8102	117,2220
10	1,6222	7,9000	513,9100	42	11,4074	0,4777	187,2201
11	1,7022	6,0002	504,2220	43	14,0250	0,4007	62,3204
12	1,7022	6,0010	520,4074	44	18,0701	0,1210	23,0220
13	1,8417	5,2402	530,8014	45	20,0030	0,1320	18,1070
14	1,9700	5,1024	522,2200	46	22,2292	0,2100	41,0400
15	2,0770	4,6942	481,2171	47	26,4074	0,1020	22,2202
16	2,1020	4,1820	480,1112	48	28,2007	0,1302	20,7010
17	2,2020	3,6202	406,1027	49	42,2014	0,1212	22,1772
18	2,4020	3,3640	412,3107	50	63,2044	0,0820	12,2222
19	2,6272	3,2700	383,7040	51	80,7224	0,2217	12,0229
20	2,6200	3,0242	376,2280	52	120,0047	0,0103	8,7023
21	2,7000	2,7200	367,0420	53	161,0210	0,0020	7,2042
22	2,8102	2,6271	341,8000	100	107,90	0,0302	6,2002
23	2,8710	2,4127	311,0710	105	214,00	0,0230	4,2223
24	2,9001	2,2471	310,0079	110	278,00	0,0184	3,2072
25	2,9224	2,2000	280,0000	120	340,01	0,0140	2,2201
26	2,9207	1,9004	281,1427	132	440,01	0,0110	2,2402
27	2,7320	1,8100	267,0400	142			

5 % dopo l'anno 800 dell'era nostra, quando Carlomagno fu coronato imperatore di Occidente, fino al 1830, avrebbe arrecato, contando da questo ultimo anno, la rendita annua di più di *cento miliardi* a ciascuno dei 30 milioni di Francesi che ora vivono in quel regno.

Adunque, senza ammettere la dottrina desolante, ed oggi vittoriosamente rifiutata, dell'economista Maltue, il quale pretendeva che i mezzi di sussistenza crescano molto meno rapidamente della popolazione, terremo per evidente che l'accrescimento delle ricchezze, nel suo sviluppo dopo i tempi storici, non seguiti una progressione paragonabile a quella del *centesimo di Carlomagno*. Ne segue perciò che devesi rigettare ogni teoria finanziera fondata sull'idea di questi aumenti favolosi.

Del resto se si giudica l'ammortizzazione dai suoi effetti, si giunge alle medesime conseguenze. Nel 1790, il debito dell'Inghilterra era di 20 440 840 fr. di rendita; e nel 1827, quando fu abolito l'ammortizzamento, la rendita ascendeva a 705 996 175 fr. In Francia, la rendita del debito nel 1816, nel qual anno fu votata la cassa di ammortizzazione, era di 143 400 000 fr., e nel 1833 montava a 187 000 000.

Frattanto devesi ammettere che il principio di ammortizzamento è pienamente applicabile, quando si tratta di intraprese e di transazioni particolari. Così, quando una Compagnia ottiene di condurre un'opera qualunque, come un ponte sospeso, un canale, ec., e di esigerne il pedaggio, basta che la rendita del primo anno, cioè il benefizio netto prodotto

dal pedaggio medesimo, sottratti gl' interessi del capitale e le altre spese sia di

5 % per una concessione di	14 anni,	21
2	25	68
1	36	73
0,50	49	15
0,25	62	41
0,04	99	13

Essendo impossibile per questo motivo il calcolare per uno speculatore il prodotto del pedaggio a $\frac{1}{2}$ a a più forte ragione a $\frac{1}{4}$ % del capitale da impiegarsi, se ne concluse giustamente che una compagnia non risente vantaggio attuale sensibile, dimandando una concessione di oltre i 50 anni, e a *fortiori* al di là dei 62.

Lo stato dunque accordando tempi troppo lunghi per le concessioni, non favorisce le intraprese; e in alcuni casi non deve prolungare la durata delle medesime al di là dei 99 anni. Inoltre può essere accordato questo prolungamento di durata, non già per offrire un aumento di rendita che non sarebbe che di $\frac{1}{100}$ del capitale, ma per compensare le perdite provenienti o dal ritardo dell' impiegare i capitali destinati all' ammortizzazione, o da altre eventualità, e per dare alle azioni nel primo anno dell' interesse un valore quasi costante.

Casse di risparmio. L' aumento dovuto agl' interessi composti è pure applicabile a queste istituzioni, così utili che non possono mai raccomandarsi ai lavoranti tanto che basti. In Toscana queste casse, che sono indipendenti dal governo, accettano qualunque *versamento* da un decimo di fiorino (14 centes.), a fiorini sessanta (fr. 84); ma da una stessa persona non ne ricevono che non la settimana. In Firenze il capitale comincia a fruttare a vantaggio del creditore il giorno seguente a quello in cui fu fatto il deposito; nelle provincie poi, il giorno dopo quello in cui le casse affiliate depositano i capitali incassati nella cassa fiorentina; il che accade sempre nel termine minore di una settimana.

Il depositante gode del frutto annuo del 4 per %; ma non riceve frutto alcuno: 1° sulle somme versate oltre i mille fiorini (fr. 1400); 2° sull' intero credito resultante da un medesimo libretto, quando questo credito fra i *risparmi* depositati e i frutti, e i frutti dei frutti ascende a cinquemila fiorini. Nel primo caso si pagano solo i frutti dei mille fiorini, e nel secondo quelli dei cinquemila; ed ogni rimanente resta infruttifero nella cassa a disposizione di quello a cui appartiene.

Le spese di mantenimento di queste casse non sono punto a carico dei depositanti; poichè le casse stesse se ne rifanno prestando *allo Stato ed alle Comuni i capitali incassati* ad no frutto modico sì, ma alquanto maggiore di quello che pagano ai loro creditori.

Dello sconto. Chiamasi così ciò che si ritiene un banchiere sul pagamento di un biglietto di cui egli sborsa il valore in contanti, sebbene questo biglietto non sia pagabile che dopo del tempo. Per adoperare con equità, bisognerebbe prendere *lo sconto in dentro*, cioè prendere soltanto il frutto della somma che effettivamente si pagn, il che si eseguisce nel modo seguente. Supponiamo che si debba sborsare il valore di un biglietto di 5000 fr. pagabili tra 1 anno e 4 mesi. Per trovare lo sconto in dentro al 4 $\frac{1}{2}$ p. % si dirà: 100 fr. al 4 $\frac{1}{2}$ % in un anno n 4 mesi danno 6 fr. di frutto; cosicchè 100 franchi posseduti attualmente equivalgono a 106 da riscuotersi tra 16 mesi. Dunque se 106 franchi in un anno e 4 mesi diventano 100, 5000 diventeranno x, e si avrà la proporzione.

$$106 : 100 :: 5000 : x = \text{fr. } 4\,716,98$$

Si vede che il valore attuale del biglietto è il quarto termine della proporzione stabilita.

L' uso però porta di prendere lo *sconto in fuori*. Così se si debbono ritirare 5000 franchi fra 1 anno e 4 mesi, postochè si vogliano oggi n si scontino al 4 $\frac{1}{2}$ p. %, si dirà se 100 fr. ne fruttano 6 in 16 mesi, 5000 ne frutteranno x, e la proporzione sarà

$$100 : 6 :: 5000 : x = \text{fr. } 300,$$

e il quarto termine della proporzione è la quantità da sottrarsi dal valore del biglietto. Questo modo, come abbiamo detto, è il più usitato; sebbene nel nostro

caso si prenda il frutto di 5000 franchi e non se ne paghino che 4700. Si vede inoltre che prendendo lo sconto in fuori, si sono ritenuti fr. 46, 98 di più che se si fosse preso lo sconto in dentro.

ASSICURAZIONI SULLA VITA E IN GENERALE. Sulle tavole di mortalità sono stati fondati diversi stabilimenti, come le *rendite vitalizie* e le *tavole tontiniane*; ma i più utili son quelli, nei quali con un piccolo sacrifizio della rendita si assicura l'esistenza di una famiglia per il tempo in cui si teme che essa non potrà più supplire a ciò che le bisogna.

I benefizi e i carichi di questi stabilimenti si calcolano generalmente riducendogli in capitali attuali col principio che « il capitale attuale equivalente ad una » somma che noe deve pagarsi che dopo » un numero determinato di anni, è eguale a questa somma moltiplicata per la » probabilità che essa sarà pagata all'epoca stabilita, e divisa per l'unità aumentata della tassa dell'interesse di 1 franco inalzata ad una potenza » eguale al numero degli anni da decorrere ».

È facile applicare questo principio alle rendite vitalizie a favore di una o più persone, e alle casse di risparmio e di assicurazioee di qualunque specie. Supponga si che si voglia formare una tavola di rendite vitalizie sopra una di mortalità. Una rendita vitalizia pagabile, per esempio, dopo cinque anni e ridotta in capitale attuale, sarà, per il principio accennato, eguale al prodotto delle due quantità seguenti, cioè: la rendita divisa per la quinta potenza dell'unità aumentata della tassa dell'interesse e la probabilità di pagarla: questa probabilità è il rapporto inverso del numero delle persone viventi al tempo di quello che costituisce la rendita al numero delle persone viventi in quel tempo aumentato di 5 anni. Formando dunque una serie di frazioni i cui denominatori sieno i prodotti del esmero delle persone indicate nella tavola di mortalità, come viventi al tempo di quello che costituisce la rendita, per le potenze successive dell'unità aumentata della tassa dell'interesse, e i cui numeratori sieno i prodotti della rendita per il numero delle persone viventi al medesimo tempo aumentate successivamente di un anno, di due, ec.; la somma di queste frazioni sarà il capitale richiesto per la rendita vitalizia a quest'epoca.

Supponghiamo ora che uno voglia per mezzo di una rendita vitalizia assicurare ai suoi eredi un capitale pagabile alla fine dell'anno della sua morte. Per determinare il valore di queste rendite si può immaginare che questa persona prenda in prestito vitalizio da una cassa di assicurazione questo capitale diviso per l'unità aumentata della tassa dell'interesse, e che essa lo metta a frutto perpetuo nella cassa medesima. È chiaro che alla fine dell'anno della morte della persona suddetta la cassa dovrà questo capitale agli eredi, ma non avrà pagato ogni anno che l'eccesso del frutto vitalizio sull'interesse perpetuo; la tavola dunque delle rendite vitalizie farà conoscere quanto la persona suindicata dovrà pagare annualmente alla cassa per assicurare questo capitale agli eredi dopo la sua morte.

Coi medesimi principii si calcolano le assicurazioni marittime. Un negoziante ha in mare dei vascelli e vuole assicurare questi e il loro carico contro i pericoli che possono correre; dà perciò una somma ad una compagnia che risponde con lui del valore stimato delle mercanzie e dei legni che le trasportano. Il rapporto di questo valore alla somma che deve pagarsi per prezzo dell'assicurazione dipende dai pericoli e dai danni a cui sono esposte le navi, e non può essere giustamente apprezzato che per mezzo di numerose osservazioni sulla sorte dei vascelli partiti dallo stesso luogo per una medesima destinazione. Ma questi stabilimenti, e tutti gli altri del medesimo genere, come le assicurazioni dagl'incendi, dagli uragani, ec., non possono aver vita se non hanno i vantaggi necessari a supplire alle spese occorrenti. Di più è necessario che essi abbiano numerosissime relazioni affinchè nel loro sviluppo questo vantaggio produca un benefizio certo.

In Toscana per costituirsi una rendita vitalizia si ricorre alla *Scala dello spedale di s. Maria-nuova*, ossia al *ragguaglio della vita dell'uomo per regola del comprare, vendere e far vitalizi*.

Secondo questa scala dalla prima età fino ai 20 anni si dà altri 30 anni di vita

dagli anni 20	a' 25	28
25	30	25
30	35	22
35	40	20
40	45	18
45	50	10
50	55	8
55	60	7
60 in là		5

La speciale medesimo dà sopra i vitalizi

da anni 20	a' 25	scudi	5 1/2 p %
25	30	»	5 2/3
30	35	»	0
35	40	»	6 2/3
40	45	»	6 4/5
45	50	»	7 1/5
50	55	»	7 3/5
55	60	»	8
60	65	»	8 4/5
65	70	»	9 3/5

da 70 in là si dà una discrezione, non passando scudi 9 e 3/5, scudi 10 e 2/5, scudi 11 e 1/5 per % all' anno.

§ 4. *Dati diversi della statistica dell' Italia.*

Nell' assegnar la misura della superficie d' Italia non trovansi punto d' accordo i geografi sieno essi italiani o stranieri; mentre secondo questi ultimi varia da 58,292 fino a 88,906 miglia quadre geografiche, e secondo i primi, da 88,800 fino a 96,500. Lo Zuccagni-Orlandini all' autorità di accurate e regolari osservazioni eseguite nei differenti Stati dà nella sua Corografia il seguente prospetto.

Superficie in miglia quadrate geografiche *dell' Italia e delle sue isole, entro i confini fisici o naturali*.

I. RR. Stati Sardi di terraferma esclusa la Savoia, e compresa la Capraia e le altre isolette.	m. q. g.	11,765
II. Principato di Monaco.	»	9
III. Svizzera italiana.	»	1,154
IV. Trentino e parte dell' Istria ex-veneta.	»	5,315
V. Regno lombardo.	»	6,295
VI. Regno veneto.	m. q. g.	7,043
VII. Ducato di Parma ec.	»	1,712
VIII. Stati estensi.	»	1,629
IX. Ducato di Lucca.	»	328
X. Granducato di Toscana e sue isole.	»	6,388
XI. Stato Pontificio.	»	12,120
XII. Repubblica di s. Marino.	»	16
XIII. Regno delle due Sicilie di qua dal faro.	»	21,971
XIV. Sicilia e isole circonvicine.	»	7,600
XV. Sardegna e isole circonvicine.	»	6,975
XVI. Corsica e isole vicine.	»	2,624
XVII. Gruppo di Malta.	»	265
Totale. Migl. q. g.		96,179

Avverte però il celebre autore che, per le operazioni catastali che restano a farsi tuttora in alcuni Stati, la misura surriferita può andar soggetta a notabili variazioni; attualmente però può ritenersi per la meno inesatta.

Devesi inoltre osservare che la superficie dei ducati di Parma e di Modena e del Granducato di Toscana variò notabilmente quando a quest'ultimo principato fu nel 1847 riunita la Lucchesia.

La popolazione assoluta dell'Italia ascende in circa 25,000,000 di abitanti.

In quanto poi alla popolazione relativa possono collocarsi gli Stati italiani in serie decrescente come appresso:

Ducato di Lucca — Regno lombardo-veneto — Ducato di Parma — Regno di Sardegna (terraferma) — Ducato di Modena — Regno delle due Sicilie di qua dal faro — Granducato di Toscana — Stati Pontificî. — Isola di Sicilia — Isola di Corsica — Isola di Sardegna.

Fra le diverse cause che, oltre le fisiche, influirono sull' aumento della popolazione lucchese, è da notarsi il numero dei possidenti cresciuto notabilmente da che furono svincolati i beni di manomorta, soppressi i fidecommissi, ec. In egual modo si rende ragione della numerosa popolazione del regno Lombardo-Veneto, dei Ducati parmigiano e modenese, degli Stati Sardi di terraferma, della Toscana o del regno di Napoli di qua dallo stretto.

Al contrario poi devo dirsi che in Sicilia sia scarsa la popolazione pur la lunghissima durata del sistema feudale abo-

lito solo nel 1818, per l' assenza dei grandi proprietari, per la mancanza di comunicazioni, e per altre cause di simil genere, che in parte possono applicarsi agli Stati Pontifici, alla Corsica ed all' isola di Sardegna. In quanto alla Toscana però dove notarsi che essa figurerebbe fra i paesi più popolati non solo dell' Italia ma della Europa, se gli abitanti fossero così numerosi nelle maremme come nelle altre parti della medesima.

Dati diversi della statistica respettiva dei diversi stati d' Italia.

STATI SARDI

Popolazione (1852).

In terraferma.	abit.	4,437,584
In Sardegna.	»	552,665
	Totale	4,990,249

Nel 1838 la popolazione assoluta nel continente era di 4,125,000 individui; la relativa di 274 per migl. q. ital.

Le famiglie erano 847,403, ed il numero medio degl' individui era 4,86 per famiglia.

Gl' Israeliti ascendevano a 6799, e gli acattolici a 21,360.

La popolazione della Sardegna nel 1838 era tutta cattolica. L' assoluta era individui 524,633; la relat. 63 per m. q. ital.

Nel 1835 le provincie di terraferma erano divise in 30 diocesi, che comprendevano altrettante cattedrali, 74 collegiate, 3756 parrocchie, 40 abbazie e 54 seminari. I conventi erano 244 di uomini, e 82 di donne.

La Sardegna era divisa in 11 diocesi, nelle quali erano altrettante cattedrali, 8 collegiate, 394 parrocchie, 88 conventi di uomini con 1105 individui, e 13 di donne.

Bilancio del 1853.	Uscite fr.	150,927,376 . 33
	Entrate »	109,223,934 . 84
	Disavanzo fr.	41,703,441 . 49

Esercito secondo il bilancio suddetto

Generali.	30
Ufficiali inferiori.	3,077
Truppa.	44,601
Totale	47,708
Cavalli per l' ufizialità.	1,650
» per i soldati, e carri.	5,836

Personale della flotta: 2680 uomini, tra i quali 1 viceammiraglio, 2 contrammiragli, 7 capitani di vascello, e 6 di fregata. Materiale della medesima: 4 fregate a vela, 4 vapori, 4 corvette, 3 brigantini, 1 brick, 6 bastimenti a vapore ec., in tutto 40 legni da guerra e 900 cannoni.

Marina mercantile. Personale: 27,592 individui. Materiale 3,305 bastimenti capaci di 167,201 tonnellate.

Nei 5 anni decorsi dal 1844 al 1849 erano i bastimenti arrivati 37,445 di 4,227,067 tonnellate, partiti i 37,320 di 4,214,128 tonnellate.

PRINCIPATO DI MONACO

Nel 1834 la popolazione assoluta era 7,200 individui la relativa 815 non compresi i 300 uomini di guarnigione Sarda.

Il clero secolare dipende dal vescove di Nizza, e nell' anno suddotto si componeva di 19 sacerdoti e 8 clerici, che stavano alla popolazione nel rapporto di 1 a 423.

IMPOSIZIONI. Le tasse esistenti son quelle della raccolta dell' ova, le gabelle sulle farine, il dazio sui macelli, e quello d' importazione e di esportazione.

Reddito ann. erariale.	fr.	360,000 nel 1834
Spese di amministraz.	»	80,000
	Avanzo	280,000

che sono destinati al mantenimento del principe sovrano che vive in Francia.

LOMBARDIA E VENEZIA

Popolazione (1851).

Lombardia.	abit.	2,725,740
Venezia.	»	2,281,732
	Totale	5,007,472

DUCATO DI PARMA

Popolazione (1852) 502,845 abitanti.

Nel 1833 la popolazione assoluta era 465,673 individui divisi in 93,906 famiglie; la relativa 272. Nel medesimo anno si ebbero 18,133 nascite, 14,784 morti, e 3452 matrimoni.

All' epoca suddetta il clero secolare ascendeva a 5,473 individui: il regolare a 656, che 411 uomini in 14 conventi, e 245 donne in 7.

Le diogesi di questo ducato erano 7, con altrettante cattedrali e seminari no' quali erano 128 chierici; le collegiate erano 21, le abbazie 4, e le parrocchie 763.

Finanze.	Entrato	fr. 9,574,686
	Uscite	» 9,636,900
	Avanzo	fr. 34,785
Militare.	Infanteria in tempo di guerra uomini	8,597
	Infanteria in tempo di pace	» 6,113
	Cavalleria in tempo di guerra	» 644
	Ufficiali	» 169
	Cavalleria in tempo di pace	» 485
	Ufficiali	» 127

DUCATO DI MODENA

Popolazione (1832).

Maschi	289,960
Donne	285,460
Totale	576,410

Condizioni diverse degli abitanti nell'anno suddetto.

Possidenti	227,586
Ecclesiastici	3,586
Militari	7,021
Esercenti professioni e arti liberali	2,648
Impiegati	6,623
Negozianti	15,723
Artigiani	40,075
Contadini	337,507
Pastori	11,577
Operai, giornalieri ec.	109,500
Mendicanti	19,076
Israeliti	2,821
Protestanti	212

Il Ducato è diviso in 5 diogesi, che comprendono 6 collegiate, e 10 seminari. Nel 1832 le parrocchie erano 601, o le corporazioni religiose, ristabilite dopo il 1814, avevano 17 conventi di maschi, 8 di femmine.

Finanze (1831).	Uscite	fr. 8,728,133
	Entrate	» 8,416,622
	Disavanzo	fr. 311,511

GRANDUCATO DI TOSCANA

Superficie del Granducato prima della riunione del Lucchese.

Area imponibile quadrati	6,180,312
Corsi di acque, strade, argini ec. »	209,283
Isole »	74,586
Totale quadrati	6,464,181

CLASSAZIONE DEI TERRENI IMPONIBILI, SUPERFICIE E LORO ANNUO REDDITO.

Terreni imponibili	Superficie (quadrati)	Reddito imponibile (1834)	Reddito per quadr. (lir. tosc.
Coltivato e vitl	644,386	12,263,213	16
» a viti e olivi	462,184	7,135,866	15,87
Lavorativi nudi	337,672	4,687,533	5,66
Boschi	1,661,716	8,071,726	7,76
Selve e castagni	661,366	1,145,654	2,17
Prati naturali e artificiali	72,364	665,666	10,83
Sodi e pastura	1,676,776	1,462,744	6,78
Prodotti diversi (orti, canneti ec.)	76,736	604,626	»
Fabbricati	26,736	12,352,418	»
Somma	6,166,618	44,336,636	

Nei fabbricati non sono comprese le case coloniche e tutti gli altri edifizi inservienti alla cultura. Il reddito *imponibile* non comprende che la parte dominicale o del padrone del fondo, poichè la parte colonica, le spese di agenzia, di mantenimento ed altre analoghe, sono tutte spese di *cultura*, necessarie per

conseguire la rendita riferita di sopra. I proprietari di beni fondi in Toscana (continente) godono di un' annua rendita di 44,339,806 lire toscane.

Il numero dei proprietari di beni fondi sul continente toscano al 1° gennaio 1835, compresi 7,901 possidenti detti Corpi morali, era 133,856.

Il reddito annuo medio per proprietario era lire toscane 333.

Il reddito annuo medio per quadrato tra le lire 6 e 7.

Popolazione. Dal 1848 in poi la popolazione del Granducato andò soggetta a notabili cambiamenti. Nell' anno suddetto la Toscana ricuperò i suoi antichi confini naturali; poichè fu ad essa riunito il Ducato di Lucca, e tutta quella parte degli Stati Estensi, che è al di qua dell'Appennino: così la popolazione toscana ascese a 1,854,650 abitanti. Ma per gli sconvolgimenti sociali accaduti dopo il gennaio del 1849, i confini del Granducato furono di nuovo modificati, poichè ne fu staccata l'alta valle del Serchio e quella tutta della Magra; la Lunigiana fu divisa fra il Duca di Parma e quello di Modena; Massa e Carrara tornarono all' Estense, a cui toccarono pure tre Comuni lucchesi. Peraltro per le ultime cessioni e restituzioni la popolazione toscana non fu diminuita che di 133,195 anime, poichè nel 1849 ascendeva a 1,721,455. L' aumento di essa a tutto il 1851 fu di 39,635, essendo in quell' anno gli abitanti della Toscana 1,761,140. Nel 1852 poi ascesero a 1,778,021.

POPOLAZIONE DISTRIBUITA PER FAMIGLIE.

Anni	Cattoliche	Israelitiche	Eterodosse
1830	318,899	1,484	333
1852	318,418	1,485	429

POPOLAZIONE DISTRIBUITA PER SESSI.

Anni	Maschi	Femmine
1833	883,898	351,831
1851	897,983	863,881

POPOLAZIONE REPARTITA SECONDO LA CONDIZIONE CIVILE O DOMESTICA, COMPRESI GL' ISRAELITI E GLI ETERODOSSI, ED ECCETTUATO IL CLERO.

		Impuberi	Adulti celibi	Coniugati	Vedovi
1830	Maschi	883,803	375,898	385,455	54,111
	Femmine	851,381	348,781	383,738	91,418
1851	Maschi	879,188	378,150	399,841	85,419
	Femmine	842,888	349,394	398,438	88,034

CLERO.

Anni	Secolare	Regolare		
		Religiosi	Religiose	Totale
1830	13,388	3,394	3,931	5,928
1851	13,388	3,373	3,313	3,384

Le tavole seguenti servono a paragonare l' aumento progressivo della popolazione in Francia con quello della popolazione Toscana.

AUMENTO PROGRESSIVO DELLA POPOLAZIONE IN FRANCIA DAL 1820 AL 1851.

Anni	Popolazione	Aumenti effettivi		Aumento proporz. sopra 100 individui	
		Quinquennali	Annuali	Quinquennali	Annuali
1820	30,431,187	»	»	»	»
1831	30,800,804	6,100,747	101,788	0,03	0,03
1836	33,040,810	870,876	190,888	0,00	0,00
1841	34,200,170	680,008	107,803	2,00	0,41
1846	35,400,480	1,170,358	234,001	3,40	0,08
1851	36,701,008	881,140	26,800	1,00	0,01

AUMENTO PROGRESSIVO DELLA POPOLAZIONE TOSCANA DAL 1820 AL 1851.

Anni	Popolazione	Aumenti effettivi		Aumento proporz. su 100 individui	
		Quinquennali	Annuali	Quinquennali	Annuali
1820	1,170,340	»	»	»	»
1831	1,300,703	108,308	17,078	10,48	1,30
1836	1,400,700	71,080	14,010	0,00	1,04
1841	1,483,000	88,108	10,030	8,70	0,74
1846	1,500,751	70,771	10,134	8,00	1,00
1851	1,701,140	100,300	20,078	10,40	0,00

Popolazione Toscana { nel 1830 1,730,777 { aumento effettivo 1831 . . 25,363
nel 1851 1,701,140 { aum. proporz. sopra 130 . . 1,40

Resulta da questa due tavole che se in Francia la popolazione dal 1831 al 1851 ebbe un aumento medio annuo di 161,035 individui, nella Toscana quel movimento progressivo fu di 19,772. In Francia nel periodo suddetto l' aumento della popolazione fu come 1 a 702, e nel Granducato come 1 a 691 Si noti però che nell' ultimo quinquennio accadde la riunione del Lucchese nel modo che è stato detto di sopra. Finalmente devesi osservare che, se la popolazione della Toscana dal 1850 al 1851 crebbe di 25,363 anime, continuando l' aumento e limitandosi a 25,000 per anno, in un decennio giungerebbe esso a 250,000: in tal modo nel 1861 gli abitanti della Toscana oltrepasserebbero i *due milioni*.

MOVIMENTO DELLA POPOLAZIONE DAL 1840 AL 1849, NON CONSIDERATO L' EX-DUCATO DI LUCCA.

Anni	Popolazione	Nati			Morti			Matrimoni	Nati da genit. ignoti	Centenari
		Maschi	Femmine	Totale	Maschi	Femmine	Totale			
1840	1,464,991	26,789	25,159	51,841	21,919	21,594	45,699	9,418	2,060	4
1841	1,490,980	27,299	25,946	53,293	24,289	23,952	47,332	10,749	2,852	9
1842	1,499,934	27,996	26,494	54,870	22,957	21,537	44,424	11,725	2,592	11
1843	1,513,820	29,998	27,529	59,627	19,495	19,825	39,518	11,554	2,920	13
1844	1,531,740	28,514	26,999	54,914	21,208	19,951	41,159	12,997	2,697	4
1845	1,546,115	29,919	28,297	58,179	20,599	19,749	40,159	12,399	2,737	10
1846	1,599,731	30,277	28,491	58,798	21,162	20,720	41,588	12,078	3,899	9
1847	1,680,819	29,667	27,772	57,529	22,048	20,841	42,889	11,798	2,925	5
1848	1,647,159	30,298	28,994	58,949	22,124	20,990	43,114	15,441	3,257	6
(1) 1849	1,654,881	29,996	28,411	58,407	23,319	24,456	46,949	12,294	3,059	9

(1) Le quattro comunità di Barga, Pietrasanta, Seravezza e Stazzema, che appartenevano al compartimento pisano, e che nel 1849 avevano una popolazione di 30,734 individui, furono date al nuovo compartimento di Lucca.

Nel 1847 le diocesi del granducato erano 22, 3 delle quali arcivescovili; ma gli Ordinari erano 20 soltanto, poichè Prato e Pistoia dipendevano e dipendono tuttora da un solo vescovo; come pure Pienza e Chiusi. Le cattedrali erano 22 ed altrettanti i seminari, 54 le collegiate, 2332 le parrocchie, 144 i conventi dei frati, e 69 quelli delle monache. Ora però le diocesi sono 23, poichè se ne fu staccata quella di Pontremoli, fu creata di nuovo la diocesi di Modigliana, e riunito l' arcivescovado di Lucca.

Finanze. Nel dicembre del 1852 le spese per l' anno 1853 furono valutate a

2,780,000	lire,	ministero	dell' interno.
3,494,600	»	»	di giustizia e grazia.
7,000,000	»	»	della guerra.
267,400	»	»	degli affari esteri.
866,500	»	»	dell' istruzione pubblica.
789,200	»	»	del culto.
21,111,100	»	»	delle finanze, del commercio e dei lavori pubblici.
36,308,800	lire,	non comprese le spese di occupazione per l' armata austriaca.	
36,376,400	lire di rendita.		

Peraltro il bilancio consuntivo effettivo delle L. 37,315,704. 14. — di spese e L. 37,215,624. 14. 6 di entrate; cosicchè si verificò un disavanzo di L. 100,079. 19. 6.

Forza armata di terra e di mare nel 1853.

Governatori militari	2	Linea (8 battaglioni)	5,017
Comandanti di piazza	50	Compagnia di correzione	69
Invalidi veterani (1° reggimento)	469	» di disciplina	50
Giandarmeria (1° reggimento)	2,231	Battaglione insulare	631
Marina	148	Cacciatori volontari di frontiera (6 battaglioni)	4,512
Artiglieria (1° reggimento)	1,320	Totale	14,759
Cavalleria (1° divisione)	260		

MARINA COMMERCIALE NEL 1853.

Dipartimenti marittimi	Bastimenti	Tonnellate
Livorno e stati dei presidi .	504	20,761.04
Isola dell'Elba.	251	9,339.39
Viareggio . .	156	7,406.56
	Tot. 911	Tot. 37,506.99

Sebbene il Ducato di Lucca politicamente più non esista, pure crediamo bene darne alcune notizie statistiche di seguito a quelle della Toscana, a cui ora questo Ducato appartiene per la massima parte.

Popolazione (1839). Assoluta 168,198 anime formanti 29,873 famiglie; relativa 525 individui per miglio quadro italiano. Nell'anno suddetto si ebbero 5,228 nascite, 3,777 morti e 877 matrimoni. In 106 anni la popolazione aumentò di 55,008 abitanti, e nell'anno *medio* di 518. La popolazione relativa è delle più forti della Europa. Si noverava un possidente per ogni 4 abitanti, compresi i livellari.

Nell'anno medesimo il clero si divideva come appresso:

Secolare	Sacerdoti	675	1,105	Totale 1,935 individui.
	Cherici	430		
Regolare	Frati	383	830	
	Monache	447		

Nel 1838	L'entrate furono	Lire lucch. 2,476,500
	Le uscite	» 2,412,500
		Avanzo lire 64,000

STATI PONTIFICI

Popolazione (1848) 2,877,000 abitanti. Nel 1829 la popolazione era di 2,679,524 indiv., e nel 1833 ascendeva a 2,733,436, non compresi gl'israeliti che montavano a 10,000 in circa.

Gli stati suddetti sono divisi in 68 diocesi, 8 delle quali sono arcivescovili.

Finanze (1853).	Uscite.	scudi	12,487,412
	Entrate.	»	11,346,311
	Disavanzo.	scudi	1,141,101

Militare. Secondo il rapporto ufficiale l'armata al 1° genn. 1853 doveva ascendere a 21,059 uomini.

Commercio.	Importazioni . .	Scudi rom. 10,598,261.05
	Esportazioni	» 9,733,464.83

NAVIGAZIONE COMMERCIALE DEI PORTI DI CIVITAVECCHIA E DI ANCONA (1851).

Bastim. entrati	romani	1,213 di	81,394	tonnellate con	9,363 uomini di equip.
	stranieri	1,604	179,448		22,618
Bastim. usciti	romani	1,288	84,387		9,221
	stranieri	1,596	182,000		21,848

REPUBBLICA DI S. MARINO

Nel 1836 la popolazione assoluta era di 7,800 individui; la relativa di 431 per miglio q. ital.

Questo piccolo stato fa parte della diocesi di Montefeltre, ed è diviso in 8 parrocchie, due delle quali dipendono dal vescovo di Rimini. Nell'anno suddetto i sacerdoti secolari erano 45, e i regolari 53.

Entrata annua scudi 600. Le imposizioni dirette sono: 1° la prediale che ascende annualmente a 400 scudi sopra una rendita imponibile di scudi 112,757, cioè di un mezzo per 100 della rendita; 2° una denominata della *guardia* di 14 baiocchi per famiglia; 3° un testatico detto *bocca e fumo* di 2 baiocchi e $^3/_4$ sopra ogni maschio adulto. Gl'individui addetti alla

guardia dei Capitani reggenti, e parecchi minori ufficiali sono esenti dalle due ultime tasse. Il resto della rendita annua proviene da livelli e altri fondi comunali, della privativa del tabacco, del sale, della polvere da fucile, dai dazi sulla vendita a minuto delle carni, del pane, del formaggio e del bollo dei pesi e delle misure. Il vino e il pesce sono esenti da ogni aggravio.

REGNO DELLE DUE SICILIE

Popolazione di tutto il regno (1851) 8,704,472; della parte di qua dello stretto 6,642,892.

Nel 1838 la popolazione di terraferma ascendeva a 6,145,293 abitanti.

Rapporti con la popolazione dell' anno suddetto.

Nati	1 : 27
Morti	1 : 36
Impuberi (maschi)	1 : 60
Impuberi (femmine)	1 : 64
Aduiti	1 : 30
Adulte	1 : 28
Celibi maschi	1 : 35
» femmine	1 : 36
Coniugati de' due sessi	1 : 22
Vedovi	1 : 34
Vedove	1 : 20
Nell' anno medesimo, i possidenti erano	1,033,874
Gl' impiegati ad arti liberali	82,051
Il Clero secolare individui	29,033
I Frati	12,371
Le Monache	9,979
I Marinari e Pescatori	59,657
I Greci uniti circa	75,000
I protestanti	830
Gl' israeliti	2,000

Secondo il concordato del 1818 le diocesi sono 109; ma essendone state aggregate alcune ad altre contigue, il numero degli Ordinari è di 86.

Al principio dell' anno 1836 la popolazione di Sicilia ascendeva a 1,947,000 abitanti.

I nati furono 76,572	maschi	39,094
	femmine	37,478
I morti » 51,662	maschi	26,426
	femmine	25,236
I matrimoni furono		18,265

Gl' individui di rito greco unite, passati in Sicilia nel 1453, ascendevano nel 1831 a 19,711. Le diocesi in cui è divisa quest' isola sono 14 e contengono 13 abbazie di regio patronato.

Militare. Infanteria,		battaglioni 88
Cavalleria,		squadroni 34
Artiglieria,		batterie 17

Flotta, 2 vascelli di linea, 5 fregate, 2 corvette, 5 brick, 1 goletta, 12 fregate a vapore e 14 piccoli bastimenti a vapore.

§. 5 *Indicazioni storiche e bibliografiche.*

L' aritmetica sociale è una scienza tutta nuova i cui limiti non sono ancora ben determinati, e i cui elementi si trovano dispersi in un numero di opere differenti; ma nessuna parte di essi è stata ancora riunita in un corpo compiuto di dottrine. Il perchè, malgrado la forma dogmatica dei libri della più parte degli economisti, non si possono considerare come risolti i più importanti problemi dell' economia politica; e finchè non sieno coordinate tutte le idee fondamentali relative all' esistenza della società, non si avranno resultati veramente positivi per la direzione da darsi alla vita materiale delle nazioni.

Indicheremo dunque solamente in un modo generale tutti i trattati di economia politica per i fatti che sono di competenza dell' aritmetica sociale. Pei pesi, monete e misure dei principali paesi del globo e dei popoli dell' antichità, citeremo la *Tavola comparativa* aggiunta dal Guérin di Thionville al *Compendio di geografia del Balbi*, il *Cambista universale* di Kelley, le *Tavole di riduzione delle monete, pesi e misure* di Loehmann, e la terza edizione dell' opera del Chélius intitolata: *Maass und Gewichtsbuch*.

Per la misura e monete antiche vi sono le *Considerazioni generali su la valutazione delle monete greche e delle romane* di Letronne; l' opera di Wurm: *De mensuris, ponderibus, nummis, etc. Graecorum et Romanorum; l' Economia politica de' Romani* di Dureau de la Malle, ec.

La *Raccolta delle tavole per uso degl' ingegneri* del Genieys; il *Pronto cal-*

colatore di Suret; l'*Annuario* pubblicato ogni anno dal *Bureau* delle longitudini; il *Manuale dei pesi e delle misure* di Tarbé; il *Ragguaglio delle monete, dei pesi e delle misure* ec. del tenente Giuseppe Guidi potrebbero essere utili per diversi confronti tra le misure italiane e le straniere.

L'*Arte di verificare le date* e il *Trattato della sfera e del calendario* di Rivard, edizione riviata da Puissant, debbono studiarsi per avere una cognizione profonda del calendario. Il *Manuale di applicazioni matematiche* di Richard da il calendario romano; e il calendario turco si trova nelle *Soluzioni dei problemi aritmetici* di Saigey.

L'Annuario delle longitudini contiene preziosi documenti sulle monete.

Il *Calcolo degl'interessi semplici* composto da Grémillet, un appendice aggiunto dall'Emmery al suo *Ponti d'Ivres*, diverse tavole di Lejoindre e di Suret devono essere consultate per le questioni relative agl'internasi, alle annualità, agli ammortizzamenti, ec. Citeremo inoltre una nota inserita negli *Annuali* dei ponti e strade (1° sem. 1834) di seguito alle tavole di Lejoindre; nella qual nota Mary da un'eccellente analisi critica dei principali lavori pubblicati per la soluzione delle questioni suddette.

I principii generali propri a facilitare le ricerche di statistica o a trovare le leggi dei dati diversi relativi all'eslatenza sociale sono ancora poco numerosi. Si potrebbe frattanto citare in primo luogo la forma ingegnosa proposta da Condorcet per registrare i dati, e che rassomiglia ad un dizionario in cui si può trovare la soluzione di un gran numero di problemi. (Vedi gli *Elementi del calcolo delle probabilità*, pag. 31). Devesi inoltre osservare che sovente è comodo sostituire alle tavole alcune figure le cui i numeri sieno rappresentati da linee o da spazi; questi segni materiali di grandezza rendono questa sensibile all'occhio dipingendone immediatamente le variazioni. Tale è la proprietà delle *curve di mortalità* che si ottengono se sopra una linea, divisa in tante parti eguali quanti sono gli anni della più lunga vita, si alzano delle perpendicolari proporzionali ai numeri degl'individui viventi a ciascuna epoca. Questa rappresentazione grafica potrebbe pure applicarsi ad un numero di altre diverse questioni.

VII. ASTRONOMIA

§ 1. *Descrizione del Cielo.*

CENNO SUL SISTEMA DEL MONDO. La terra da noi abitata è un globo presso a poco sferico, di un circuito di 40 mila chilometri. Si aggira sopra di se stessa in 23 ore e 56 minuti e 4 secondi; gira poi attorno al sole in 365 giorni e $^1/_4$, ossia in un anno. Il diametro attorno al quale si opera tal rivoluzione diurna si chiama *asse*, le estremità di esso, *poli*. La rivoluzione annua si effettua sur una curva piana, ellissi di cui il sole occupa uno de' fuochi, e che con proprio nome si appella ecclittica. L'asse della terra è inclinato di circa 23 gradi, 27′, 37″ sul quello dell'ecclittica. Il polo più vicino per l'Europa è il settentrionale, l'opposto è il meridionale. A un osservatore situato nella direzione dell'asse, il settentrione resta sul capo, il mezzodì ai piedi, il levante a sinistra, e il ponente a destra. La terra fa parte di un sistema di corpi di cui il sole occupa presso a poco il centro, e che mentre si aggirano su se medesimi girano attorno a quest'astro. Questi corpi che, presentano molti punti di analogia colla terra sono, rifacendosi dal sole:

Mercurio	Egeria
Venere	Irene
Terra	Eunomia
Marte	Psiche
Cerere	Teti
Pallade	Melpomene
Giunone	Fortuna
Vesta	Massalia
Astrea	Lutezia
Ebe	Calliope
Iride	Talia
Flora	Giove
Meti	Saturno
Igiea	Urano
Partenope	Nettuno.
Vittoria	

Di più recente scoperta è la serie seguente di asteroidi che va di giorno in giorno aumentandosi:

Temi
Focea
Proserpina
Euterpe
Anfitrite

ed un altro scoperto nel marzo di quest'anno 1854, che non è stato ancora battezzato.

Oltre i pianeti vi hanno i satelliti che girano attorno ad un pianeta principale, e tale è la Luna che aggirandosi sopra il suo asse e intorno alla Terra, questa accompagna nel suo moto di traslazione. Giove ha quattro lune o satelliti come si vedrà più oltre. Saturno sette, con di più un anello, Urano sei, un solo Nettuno.

Vi ha di più le comete che in numero incalcolabile si muovono attorno al sole. Questi corpi differiscono essenzialmente dai pianeti e specialmente pel vagare ch'essi fanno pello spazio in tutte le direzioni e descrivendo curve o orbite eccessivamente allungate, nel mentre che le orbite planetarie sono generalmente ellittiche, pressochè circolari, inclinate pochissimo sull'ecclittica, lungo le quali il moto succede costantemente pel medesimo verso, vale a dire di occidente in oriente, e nello stesso modo succede la loro rotazione sull'asse.

Anche più numerosi sono gli asteroidi la cui natura e movimenti son poco conosciuti, e popolano quella porzione di spazio illuminata e dominata, per così dire, dal sole.

Le stelle sono distanti da noi per uno spazio che spaventa solo a pensarci. Quantunque la luce che da loro ci viene percorra più di 300,000 chilometri per minuto secondo, essa non impiega meno di nove a dieci anni per arrivare infino a noi, anche dalle più vicine: che anzi non è da mettere in dubbio che ve ne abbiano alcune la cui luce non giungerà fino a noi che in capo a mill'anni e forse più. Di qui si inferisce che alcune stelle abbiano cessato di esistere da gran tempo, ma che restino, e sieno per restare tuttavia per noi apparenti, a cagione del gran tempo che la luce spende nel pervenire da esse a noi.

Ma tentiamo di farci un'idea dell'immensità di questa distanza, argomentandola da quello che passa tra stella e stella. Supponiamo di trovarci in una pianura, al punto ove si scorgono alla distanza di 6 leghe due campanili di due diversi villaggi a certa distanza fra loro. I campanili sembrano vicini mercè la nostra gran lontananza, ma di mano in mano che proseguendo il cammino ci avviciniamo ad essi, gli vediamo allontanarsi l'uno dall'altro. Poniamo che invece di due campanili sieno due stelle fisse E E' distanti fra loro

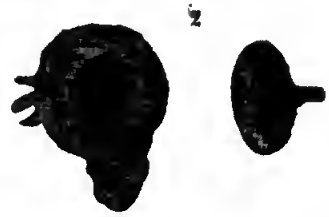
di un grado, che T sia la posizione della terra ad una delle estremità della sua orbita TT'; quest'orbita avendo 68,000,000 di leghe di diametro, quando la terra sarà in T' si troverà più ravvicinata alle stelle EE' di 68,000,000 leghe di quando era in T; in conseguenza l'intervallo che separa l'una delle stelle dall'altra, dovrà sembrare più grande, a meno che il diametro T T' non sia infinitamente piccolo relativamente alle linee TE, TE': e questo è appunto ciò che segue, poichè se allorquando la terra era al punto T, si è trovato che le stelle erano distanti solo di un grado, e quando la terra arriva al punto T', si trova sempre la medesima distanza di un grado fra E ed E'; è forza concludere che la linea TT' è infinitamente picco-

la rispetto a TE e TE′, o in altri termini, che 68,000,000 di leghe non son che un punto riguardo alla distanza nostra dalle stelle. Se la differenza fosse soltanto di un mezzo minuto secondo, le stelle sarebbero 430,000 volte più lontane da noi del sole, vale a dire sarebbero a 30 miliardi di leghe. Ora la differenza non è neppure di un mezzo secondo, dunque la loro distanza è anche più considerabile.

Un confronto familiare proposto dall'Herschell è opportunissimo a presentare un idea esatta delle diverse proporzioni fra i corpi celesti di quella parte di universo che ne circonda. Sopra una tavola ben piana pongasi un globo di circa 60 centimetri di diametro, che raffiguri il sole, poi si rappresenti Mercurio con un granello di senape che giri sur un' orbita a 24 metri di distanza dal centro del globo anzidetto. Venere, con un piselle che giri sur una circonferenza di 44 metri: la Terra, con un pisello alquanto più grosso con una circonferenza di 61 metri: Marte, con una veccia a 93 metri di distanza: Vesta, Giunone, Cerere, Pallade, Astrea, Ebe e gli altri asteroidi con dei granelli di arena. Giove con un arancia di grossezza mezzana, sur un'orbita di 317 metri di raggio: Saturno, con una pesca ordinaria sur una periferia di 582. Urano con una ciliegia grossa a 1170 metri in circa di distanza: Nettuno con una piccola albicocca a 2500 metri: queste grandezze stanno l'una rispetto all'altra come quelle dei veri pianeti al disco solare. Quanto alle comete, nel momento che sono vicine al sole e ai pianeti, produrrebbero nel nostro quadro l'effetto or di una piuma leggera trasportata dal vento, ora di un filo di fumo che va a perdersi nello spazio colla sua estremità. Ora riducendo tutto l'universo alla stessa proporzione, converrebbe percorrere 40,000 chilometri (10,000 leghe) almeno, per ogni verso, prima di incontrare la stella la più vicina al nostro punto centrale.

Il sole è un globo luminoso il cui diametro è 109 volte $\frac{1}{2}$; il volume circa 1,300,000 volte quello della terra. Il diametro apparente varia da 31′ 31″ a 32′ 36″. Si aggira sopra di se medesimo di occidente in oriente nello spazio di 25 giorni circa, attorno a un asse inclinato di 82° 48′ sul piano dell'ecclittica: il suo equatore o cerchio perpendicolare all'asse è dunque inclinato di 7° 20′ su questo piano.

Chi osservi il sole con dei forti telescopi armati di vetri molto coloriti per preservare la vista dall'ardore dei suoi raggi, vedrà frequentemente sopra la sua superficie, in una regione che non si estende più di 30° da una parte o dall'altra dell'equatore solare, delle macchie oscure circondate da una specie di orlo meno oscuro, chiamato *penombra*. Macchie di tal fatta son rappresentate nella figura sottoposta: desse non son permanenti: da un giorno all'altro, anzi da ora ad ora pare che si allunghino o si ristringano, cangino figura, o spariscano totalmente, o ricompariscano in altre parti della superficie, dove prima non v'era traccia.



Questi moti indipendenti da quello di rotazione comune al sole e alle macchie della sua superficie, si effettuano alcune volte in grande. Da recenti osservazioni del Laugier risulta, che spesso una forza medesima sembra avvicinare e allontanare successivamente due macchie dall'equatore solare. Una quantità di piccoli pori o punti oscuri, di *faccole* o righe più luminose del rimanente del disco in vicinanza delle macchie più grandi, cuoprono la superficie del sole: dal che si deduce che questa superficie è in un continuo stato di mutazione; a assai sodisfacente è l'ipotesi con cui l'Herschell ne dà spiegazione. Egli suppone che quest'astro si componga di un nucleo solido di colore oscuro, cinto di un atmosfera assai densa e di una estensione considerevole, da cui la sostanza luminosa e calorifera viene inviluppata. Ora se avviene che i due strati gazosi esterni si rompano o si squarcino, il nucleo interno

verrà ad occupare il centro di una macchia e la penombra sarà l'effetto della riflessione della luce sull'atmosfera intermedia.

Le fiamme le più vive e i corpi solidi nello stato di infuocamento il più intenso non appariscon più che come macchie nere sul disco del sole, quando si interpongono fra questo disco e l'occhio. Potrebb'esser dunque che il nucleo solido del sole fosse in uno stato d'infuocamento intensissimo, quantenque ci sembri oscuro quando si vede in mezzo alle macchie.

Fa d'uopo ricorrere a delle congetture per ispiegare la forza calorifica e luminosa dei raggi solari. Alcuni appoggiati all'autorità del Newton, pretesero che il sole, come tutti i corpi lucidi, avesse la proprietà di lanciare con una prodigiosa velocità, particelle tenuissime della sua sostanza. Questo è il sistema detto dell'*emissioni*. Altri pensarono al contrario, che il fenomeno della luce fosse prodotto dalle vibrazioni di un fluido chiamato etere, sparso per tutto il creato e mosso dalla presenza dei corpi lucidi. Questo è il sistema delle *vibrazioni* ovvero *ondulazioni*, e si è conciliato le oggi tutte le opinioni: perchè non si intende come un corpo potrebbe emettere continuamente una parte delle sue molecole, senza nulla perdere del suo volume e del suo splendore. Ma il più gran difetto del sistema dell'emissioni è che al presente non sodisfa a tutte le condizioni; mentre l'altro riunisce tutte le probabilità, specialmente dopochè recenti scoperte han fatto conoscere i rapporti più intimi tra la causa che produce i fenomeni elettrici e quella che fa nascere la luce.

MERCURIO. La piccolezza di questo pianeta e la sua gran vicinanza al sole rendono difficile il vederlo. Il suo diametro apparente varia da 4″ a 12″; il reale non è che il terzo, la superficie il decimo, e il volume il ventiduesimo, del diametro, superficie e volume della terra. Osservandolo mediante un buon telescopio, si vedono le sue fasi analoghe a quelle della nostra Luna, ma i suoi lembi non ben decisi indicano essere esso circondato da un'atmosfera. Lo Schroeter vi ha scoperto delle montagne alte al doppio delle più elevate fra le nostre. Da alcuni incavi osservati nel pianeta, quando ha la figura di mezza luna nelle sue fasi, si è dedotto che Mercurio rueta sopra di se nello spazio di 24 ore e poco più, come la terra. Qualche volta succede che Mercurio viene a passare fra la terra e il sole sotto la forma di una macchietta nera che descrive la corda di questo disco. L'ultime fenomeno di tale specie successe al 9 novembre 1848, e gli altri che succederanno nel corso del secolo presente, saranno al 12 novembre 1861, al 5 novembre 1868, al 6 maggio 1878, agli 8 novembre 1881, al 10 maggio 1891, al 10 novembre 1894.

VENERE. È un poco più piccola della terra: la sua superficie è 0,9 e il suo volume 0,8 della superficie e del volume del nostro globo. Per quanto il suo diametro apparente giunga alcuna volta a 61″, misura che eccede quella di qualunque altro pianeta, essa presenta maggiori difficoltà di ogni altro pianeta ad esser veduta chiaramente col telescopi. Il gran brillare della parte rischiarata produce tali scintillamenti di luce che ingraediscono tutti i difatti che possono essere nello strumento ottico.

Veduta col telescopio Venere ci presenta delle fasi come Mercurio e come la Luna, prendendo tutte le forme intermedie fra quella di una mezza luna bene spiccata a quella di un disco completo. La circonda una atmosfera, per la densità e per l'estensione analoga a quella della terra. Lo Schroeter ha creduto di vedervi delle montagne colossali che in altezza vincono le nostre più grandi, quali il Chimborazo e il Dhavaladgiri. Nonostante che il gran Cassini nel 1666 avesse creduto di riscontrare che Venere gira su se medesima in 23 ore e 16 minuti, e lo Schroeter in 23 ore e 21 minuto; il Bianchini pretese che tal rotazione si effettuasse in 24 giorni circa. Era dunque sempre dubbio su tal proposito, quando gli astronomi dell'osservatorio del collegio de' Gesuiti a Roma, dopo un corso di osservazioni fatte di giorno e con molta cura e assiduità, l'anno 1839 coe un eccellente telescopio di Cauchoix, tolsero qualunque dubbio e confermarono il resultamento dello Schroeter. Anche questo pianeta al pari di Mercurio si interpone qualche volta fra noi e il sole, nel disco del quale viene a comparire come una macchia re-

tonda. Questi passaggi, per quanto rari, sono di un' importanza grandissima per gl' astronomi, come quelli che porgono il mezzo più esatto di ogni altro che si conosca, per misurare la distanza del sole dalla terra. Gli ultimi due furono osservati nel 1769 e 1772. Quei dei secoli vegnenti succederanno il 9 dicembre 1874, il 6 dicembre 1882, l' 8 giugno 2004, il 6 giugno 2012, l' 11 dicembre 2117, l' 8 dicembre 2125.

MARTE. Questo pianeta è il primo di quei che si dicono *superiori*, oppostamente ai due precedenti, che *inferiori* si appellano, per esser situati fra la terra e il sole: ha un diametro di un 0.6, una superficie di 0.3 e un volume di 0.2 del diametro, superficie e volume della terra. Il suo diametro apparente varia da 4″ a 27.″ Vi si scorgono distintamente dei contorni che possan accennare la separazione dei continenti dai mari. La figura sottoposta lo rappresenta quale l'osservò l' Herschell il 16 agosto 1830, con un telescopio a riflessione di sei metri di fuoco.

3

La forma lievemente obluoga di questa figura riporta una delle sue fasi: queste però son molto meno sensibili che in Venere a motivo della sua maggior distanza. Il colore rossastro di esso che si scorge anche ad occhio nudo, indica senza dubbio la tinta del suo suolo simile a quella che i nostri terreni sabbiosi o di grès rosso potrebber presentare agli abitanti di Marte. Probabilmente le parti più rosse mostrano i continenti, e quelle che si rassomigliano a mari, comparirebbero verdastre, e ciò in virtù di un contrasto di colori. Vero è che tali macchie non si scorgon sempre distintamente, ma quando si vedono non variano aspetto, e ciò nasce forse dal non essere il pianeta mancante totalmente di atmosfera nè di nuvole. Però dall'osservazione fatta il 28 novembre 1832 da Giacomo South risulta che questa atmosfera non può essere che rarissima e poco densa.

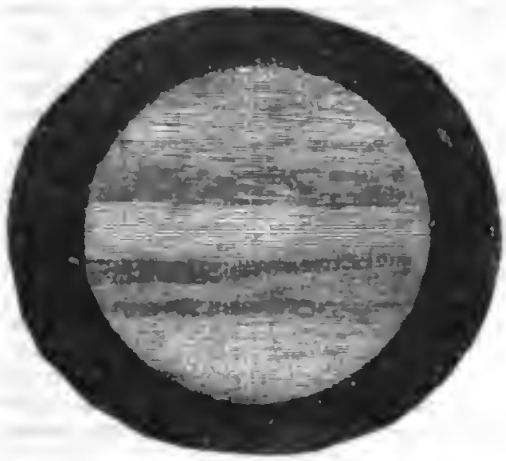
Marte si aggira su di se medesimo in 24 ore, 39 minuti e 21 secondi, intorno a un asse inclinato di circa 30° 18′ sull' ecclittica. I poli od estremità di quest'asse, pare che, come i poli della terra, sien cinti da calotte di ghiaccio che si sciolgile alternativamente quando restano esposte all' azione più diretta dei raggi solari. La figura sovrapposta rappresenta nella parte superiore una di queste macchie brillanti, la cui esistenza coincideva precisamente coll' inverno dell' emisfero, di cui il centro di questa macchia è il polo. Questo fatto cresce un nuovo grado di probabilità all' esistenza d' un' atmosfera intorno a questo pianeta, perocchè senza liquidi non si danno ghiacci, e senza atmosfera non si dan liquidi sulla superficie di un pianeta.

I NUOVI PIANETI O ASTEROIDI Cerere fu scoperta dal Piazzi a Palermo il 1 gennaio 1801; Pallade dall'Olbers a Brema il 28 marzo 1802; Giunone il 1 settembre 1804 dall' Harding a Lilienthal, Vesta il 29 marzo 1807 parimente dall' Olbers a Brema; agli 8 dicembre 1845 il prussiano Henke a Driesen scuoprì un nuovo asteroide che chiamandolo Astrea, che compie la sua rivoluzione in 4 anni, mesi 2 e giorni 15: il primo luglio 1849 scuoprì un altro asteroide a cui il Gauss dette il nome di Ebe; l' inglese Hind nell' osservatorio di Bishop scoprì l' asteroide chiamato Iride ai 13 agosto 1847, e ai 18 ottobre dell' anno stesso il medesimo astronomo scuoprì un altro piccolo pianeta, a cui Giovanni Herschell pose nome Flora. Meti fu scoperto dal Graham ai 25 aprile 1848; Igica dal de Gasparis il 12 aprile 1849; agli 11 maggio 1850 parimente il do Gasparis scoperse Parteuope; l' Hind, Vittoria il 13 settembre dell' anno stesso. Di nuovo il de Gasparis ai 2 novembre 1850 vide un nuovo asteroide cui pose nome Egeria, e il 19 maggio l' Hind scoprì Irene. Eunomia fu sco-

perta dal de Gasparis il 29 luglio 1851, e Psiche dallo stesso il 17 marzo 1852. Luther scoprì Teti al 17 aprile di quell'anno; l'Hind Melpomene ai 24 giugno dell'anno stesso, e ai 22 agosto, Fortuna. Lo Chacornac ai 20 settembre vide Massalia, il Goldschmith, Lutezia il 15 novembre, e l'Hind Calliope e Talia, l'una ai 16 novembre, e l'altra ai 15 dicembre sempre dello stesso anno. Nel seguente 1853 il de Gasparis scoperse Temi ai 6 aprile, lo Chacornac Focea lo stesso giorno; il Luther Proserpina ai 5 maggio, e l'Hind Euterpe agli 8 settembre; nell'anno corrente 1854 lo stesso Hind scoperse Anfitrite il primo marzo. Gli asteroidi sono tutti telescopici e le loro orbite di poco differiscono fra loro; quindi l'ipotesi dell'Olbers che il primo supposo questi piccoli pianeti esser frantumi di un pianeta assai voluminoso, già esistente fra Marte e Giove, fracassato o da una forza espansiva, o dall'urto di qualche grossa cometa, par che vada acquistando credito sempre maggiore. Secondo l'Herschell il loro diametro apparente, quando sono più vicini a noi, non arriva ad un intero secondo.

È stato osservato che Cerere e Pallade sono spesso come involuppate da un'atmosfera che si stenderebbe a più di 700 chilometri dalla loro superficie; lo che impedisce di bene distinguere il loro nucleo solido: altre volte all'incontro i pianeti mostrano un contorno distinto e netto e brillano di una luce pari a quella delle stelle fisse. Lo Schroeter asserisce di aver osservato questa atmosfera contrarsi della metà del suo volume ed anche scomparire affatto. Analoghi cangiamenti ma meno distinti sono stati osservati in Giunone, ma non in Vesta. Circa la rotazione degli asteroidi sa di se medesimi, non si sa ancora nulla di certo.

GIOVE. È questo il massimo dei pianeti, avendo un diametro di circa 148,000 chilometri, cioè a dire 14,000 volte più grande di quello della terra: la superficie 121 volta e il volume 133 volte più grandi che la superficie o il volume del nostro globo: il volume è nonostante 905 volte più piccolo di quello del sole. Il suo diametro apparente varia dai 49″ ai 50,″ e gira sopra di se con una celerità maravigliosa, non impiegando più di 9 ore, 55 minuti, e 8 secondi. Il disco ne appariace sempre fasciato in una data direzione da zone o striscie oscure, come vedesi nella sottoposta figura e tali quali le ha osservate l'Herschell a Slough ai 23



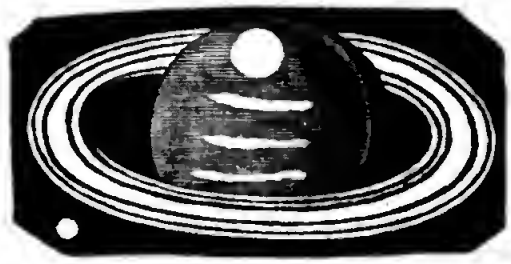
settembre 1832, col suo teloscopio di sei metri. Queste fasce variano di grandezza o di situazione sul disco, non però nella loro direzione generale che si mantiene parallela all'equatore, attorno al quale sono più larghe: che anzi si sono qualche volta vedute rompersi o spandersi in tutta la superficie del pianeta: fenomeno però assai raro. Spessissimo poi si scorgono in esse delle suddivisioni e diramazioni (come si vedono accennate nella sovrapposta figura) e delle macchie

oscure che ci richiaman l'idea delle nuvole. Secondo lo Schroeter vi si vedono sovente delle macchie muoversi con una celerità di 100 a 130 metri per minuto secondo, tripla di quella dei nostri più violenti uragani: lo che indicherebbe l'esistenza di un'atmosfera solcata da correnti analoghe ai nostri venti alisei.

Giove è schiacciato pel verso dell'asse, che al diametro equatoriale sta come 100 a 107.

SATURNO. Veduto col telescopio questo pianeta offre il sorprendente spettacolo di un globo circondato da una specie di anello sottile e largo: ha un diametro di circa 126,000 chilometri, poco differente per conseguenza da quello di Giove: rispetto a quello della terra è circa 10 volte più grande, la superficie 95 volte, e il suo volume 928 volte. Il diametro apparente va dai 15" ai 21".

La figura qui sotto rappresenta Saturno tale quale è stato veduto nel corso del mese di giugno 1838 dagli astronomi del collegio romano. La sua superficie è fasciata da zone, analoghe ma meno determinate di quelle di Giove. Anche la superficie dell'anello è segnata di righe scure che lo spartiscono come in cinque anelli concentrici. L'Herschell vecchio che non avea veduta che una sola di queste fasce, credeva che l'anello constasse di due parti distinte. Un'opinione analoga a questa sembra esser quella adottata dagli osservatori del collegio romano per rispetto alle nuove fasce da loro ritrovate. L'Arago tiene per più verosimile la sentenza che i tratti scuri presi per intervalli fra anello e anello, si debbano considerare come analoghi alle zone di Giove e di Saturno stesso. In appoggio di questa opinione è da aggiungere che gli astronomi romani, coll'aiuto dell'eccellente telescopio di Cauchoix, videro il numero delle divisioni aumentare fino a cinque e in seguito, in parte almeno, sparire, senza che riscontrare se ne potesse una plausibil ragione nella diversa posizione del pianeta o nella sua maggior distanza dalla terra, o nella variabilità del sereno nell'orizzonte. Nonostante lo Smith cita nella sua *Ottica* un'osservazione di Clarke secondo cui la principal divisione dell'anello dipenderebbe da un vuoto, a traverso del quale in certe circostanze si possan vedere le stelle.



Il diametro esterno dell'anello è di 140,750 chilometri, l'interno di 94,000 circa: la larghezza dunque di 46,750 e la grossezza, per l'Herschell di 163: la distanza del lembo interno dell'anello dalla superficie del pianeta è di 38,700 chilometri. A parere dello stesso Herschell il volume dell'anello sarebbe quintuplo di quello della terra; ammessa però la grossezza di 882 chilom. che gli dà lo Schroeter, questo volume sarebbe 47 volte quello della terra. Il pianeta si aggira sopra di sè in 10 ore e 16 minuti circa, sur un asse perpendicolare al piano dell'anello e inclinato di 64° a 20' al piano dell'ecclittica. Anche l'anello si aggira attorno al centro che ha comune col pianeta, in 10 ore e 27 minuti circa. Ogni quindici anni l'anello si presenta alla terra per taglio e allora sparisce del tutto, funchè per i telescopi di una forza straordinaria. L'ultima volta, e fu il 29 aprile 1833, che questo fenomeno avvenne, la comparsa dell'anello fu completa anche pel telescopio dell'Herschell di 45 centimetri di apertura e 6 metri di lunghezza focale. Quando Saturno si trova al 90° delle posizioni in cui l'anello sparisce, l'ellisse che termina il contorno apparente di esso, assume la sua massima lunghezza, e il

grand' asse diventa quasi esattamente il doppio del piccolo asse.

URANO. Fu scoperto questo pianeta dall' Herschell il vecchio, ai 13 marzo 1781. Anche coi migliori telescopi alla mano non ci si presenta che come un piccolo disco rotondo, di una luce sempre compagna, senza anelli, nè fasce, nè macchie. Il suo diametro apparente è di circa 4″, e non varia mai a motivo della piccolezza dell' orbita terreatre, in faccia a quella di Urano. L' Herschell il vecchio ha notato in esso uno schiacciamento considerabile, lo che indica una rotazione rapidissima del pianeta su se medesimo. Il diametro medio è di circa 52,230 chilometri: la sua superficie dunque è 17 volte la superficie della terra, e il volume n' è 76 volte maggiore.

NETTUNO. La notte del 23 settembre 1846 nell' osservatorio di Berlino dall' astronomo Galle fu trovato un nuovo pianeta, l' esistenza e posizione del quale con esatti calcoli avea predetto il geometra francese Leverrier. A questo fu dato il nome di Nettuno e percorre la sua orbita, la più vasta del sistema solare finora conosciuta, in 238 anni in circa, a una distanza dal sole di un billione e 250 milioni di leghe. Ha un volume 230 volte maggiore di quello della terra, e secondo le osservazioni del Lassell sarebbe cinto da un anello e accompagnato da un satellite.

LA LUNA. È il satellite della terra. La distanza media dei centri di questi due astri è di circa 60 raggi terrestri ossia 381,000 chilometri. Tal distanza che par al grande, non è nulla di più di un quarto del diametro solare, di guisa che se il centro della terra fosse trasportato nel centro del sole, la superficie esterna di questo abbraccierebbe l' intera orbita della Luna e ne resterebbe fuori quasi altrettanto. Il diametro reale, la superficie e il volume della Luna stanno in faccia ai medesimi elementi presi sulla terra, nel rapporto di 1 a 3,69 — 13,60 — 50,15. L' inclinazione dell' orbita lunare è di 5° 8′ 48″ sul piano dell' ecclittica. La Luna runta sopra di se d' occidente in oriente, sopra un asse quasi perpendicolare all' ecclittica, formando un angolo di 88° 29′ 49″ con questo piano. Il periodo della rotazione è precisamente uguale a quello della rivoluzione attorno alla terra, cioè 27 giorni 7 ore, 43 minuti circa. Tutti conoscono le fasi della Luna, le quali nascono dal voltare che ella fa successivamente verso di noi la parte del suo disco illuminata dal sole. Mediante i telescopi si scorgono sulla superficie di essa certe ineguaglianze che non possono esser altro che montagne e colline. L' orlo convesso della luna crescente è circolare e press' a poco unito, ma il concavo della parte illuminata offre sempre delle intaccature profonde. Le montagne vicine a quest' orlo progettano delle ombre considerevoli che diminuiscono di mano in mano che la parte illuminata aumenta ai nostri occhi. Finalmente al tempo della luna piena, non si scorgon più ombra sulla superficie, ma degradazioni di tinte soltanto.

La figura che segue, rappresenta una regione della Luna veduta col telescopio.

Da quest'ombre si sono potute calcolare le altezze di parecchie di queste montagne, e lo Schroeter assegna più di 8,000 metri all' altura designata col nome di Leibnitz. La più gran parte di questa superficie è aspra di simili prominenze, il cui aspetto è di una singolare uniformità. Son quasi tutte esattamente circolari, oppure hanno la forma di tante coppe il cui interno ha verso gli orli una curva ellittica.

Ve ne ha delle più ampie, il fondo del cui incavo è un' area piana, dal centro della quale si alza una piccola prominenza conica di un declive scosceasissimo. Cosi esse rassomigliano assai ai terreni vulcanici che si osservano sul Vesuvio, sull' Etna, e sul Puy de Dome. L' Herschell il giovane ha scorto sopra di alcune dei segni incontrastabili di eruzioni vulcaniche, e il Bernouilli aggiunge che il cratere ha una profondità di 6000 metri circa.

La Luna non ha nuvole nè altra cosa che indichi in essa un' atmosfera: se ne deduce che sia sprovveduta di liquidi o di mari. Le macchie oscure a cui è stato dato questo nome, esaminate da vicino presentano dell' apparenza inconciliabili coll' idea di un' acqua profonda. Tuttavia vi si scorgono delle vaste regioni livellate che hanno tutto l' aspetto dei terreni depositati dalle acque sulla superficie ter-

restre. La figura seguente, delineata da Gruithulsen serve a porgere un' idea dell' aspetto che presentano certe regioni della Luna vedute coi telescopio, quando sono rischiarate obliquamente dal sole. Il cratere a destra porta il nome dell' anti-

6

co astronomo Manilio; l' altro a sinistra quello di Menelao. Lo Schroeter e il Gruithuisen hanno sovente osservato che le apparenze della Luna variavano da una lunazione all' altra: ma questi cambiamenti son dovuti a certe differenze dipendenti dal modo con cui una stessa porzione della Luna può essere illuminata dal sole.

SATELLITI DEGLI ALTRI PIANETI. Giove è coronato da quattro satelliti che si possono vedere anche con telescopi non tanto forti. Le orbite loro coincidono quasi esattamente coll' equatore del pianeta principale; e conseguentemente questi satelliti si scorgon sempre come punti brillanti sur una linea diritta che passa pel centro di Giove, parallela alle fasce. I loro diametri nell' ordine delle distanze da Giove sono $\frac{1}{21}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{24}$ e $\frac{1}{34}$ del diametro di questo pianeta. Il diametro apparente di nessuno di essi arriva a due secondi per noi. I satelliti girano di occidente in oriente attorno a Giove. Ora passano dietro l' ombra progettata dal pianeta e spariscono momentaneamente, ora passano sul disco del pianeta stesso. In quest' ultimo caso avviene di osservare i satelliti come tante macchie brillanti sur una fascia scura; qualche volta all' opposto, sembrano tante macchie scure di dimensioni più piccole che non l' ombra progettata sul disco del pianeta. Questo fatto curioso osservato dallo Schroeter e dall' Harding indica, per alcuni satelliti almeno, delle macchie oscure di grande estensione sulla superficie o nell' atmosfera di questi corpi. I tre primi satelliti non possono essere eclissati simultaneamente e non si conosce che un' osservazione sola fatta da Molineux

il 2 novembre 1681 (stile antico), in cui Giove fosse veduto senza satelliti.

I sette satelliti di Saturno sono molto meno conosciuti di quei di Giove. Il settimo, che è il più lontano dal pianeta, supera gli altri in dimensioni di tanto, che non sono da meno di quelle di Marte. La sua orbita ha un'inclinazione sensibile sul piano dell'anello col quale le orbite di tutti gli altri coincidono press'a poco. Questo satellite al pari di quei di Giove offre delle variazioni periodiche nella sua luce, e ciò ha dato il modo di accertare che ei gira sul suo asse nel medesimo tempo che impiega a compire una rivoluzione attorno a Saturno. Il sesto può facilmente vedersi: i tre che vengono dopo, sono piccolissimi e non si possono scorgere che con buoni telescopi. I due rimanenti che vengono a radere gli orli dell'anello e che si muovono esattamente nel suo piano, non sono stati veduti che in certe date circostanze. Siccome l'anello veduto coi telescopi ordinari appariva; nel 1789 l'Herschell padre, munito di un telescopio a riflesso di un metro e 20 cent. di apertura, vide i detti satelliti infilare come i grani di una corona nel filo di luce sottilissimo a cui riducevasi l'anello, allontanarsi per un tempo brevissimo dall'estremità di questo filo, poi togliersi nuovamente allo sguardo. Ma a Roma, e questo prova quanto la purezza del cielo possa supplire alla forza degli strumenti, nel corso del giugno e del luglio 1838, gli astronomi del Collegio dei Gesuiti videro tutti i satelliti di Saturno con una lente di Cauchoix, il cui obiettivo non era che di 0m,16 di diametro. La figura di Saturno sopra riportata si riferisce a questa osservazione e mostra il satellite più vicino al pianeta. I cinque satelliti più lontani non si eclissano mai, se non quando il piano dell'anello passa pel sole e che noi lo vediamo di fianco.

Dopo i due primi satelliti di Saturno, quei d'Urano sono i più difficili a scorgere. Dei sei notati dall'Herschel padre, due solamente, il secondo e il quarto, sono stati riveduti. Oppositamente all'analogia che si riscontra in tutto il sistema solare, i piani delle loro orbite sono quasi perpendicolari all'ecclittica, e i loro movimenti sono retrogradi, cioè a dire si eseguiscono d'oriente in occidente: il movimento ordinario d'occidente in oriente porta il nome di *diretto*.

Del satellite di Nettuno non è stato osservato tanto da poterne ora dare delle precise notizie.

Comete. Questi astri constano ordinariamente di una massa di luce ampia e scintillante, ma non ben terminata, che appellasi *testa*, ove si trova un centro o *nucleo* più brillante del resto, somigliante a una stella o ad un pianeta. La coda consiste in due strascichi luminosi che si partono dalla testa in una direzione il più delle volte opposta al sole, per rapporto alla cometa, i quali strascichi ora si riuniscono, ora restano distanti e separati. Qualche volta la coda ha una immensa lunghezza apparente. Quella della cometa dell'anno 371 avanti G. C., citata da Aristotele, occupava un terzo cielo ossia un 60° del cielo. Quella dell'anno 1618 della nostr'era, aveva, a quel che dicesi, uno strascico lungo 104°. Nell'altra del 1680 si vedeva una testa il cui splendore si agguagliava a quello di una stella di seconda grandezza con una coda che copriva 70°, e per altri, 90° del cielo. La figura che segue rappresenta la cometa dell'anno 1819,

7

una di quelle che al pari della veduta da noi l'anno 1853 o 54, si sono potute vedere ad occhio nudo.

Le comete del 1585 e del 1763 non presentavano alcuna traccia di coda e il Cassini descrive quella del 1682 come simile a

Giove nella rotondità e splendore. Quella del 1744 aveva sei code che si spiegavano come un immenso ventaglio sur una lunghezza di quasi 30°. Le piccole comete telescopiche che son le più numerose, non compariscano che come masse vaporose tonde o un poco ovali, più dense verso il centro ma senza nucleo distinto.

Le stelle più piccole che spariscono nelle nebbiarelle leggere dell'orizzonte, restano visibili a traverso la parte la più densa delle comete.

Delle già osservate il numero sale a più di 700, ed è probabile che ve ne siano parecchie migliaia. Molte debbono sfuggire all'occhio perchè traversano di giorno la parte visibile del cielo. Seneca riferisce che al tempo di un'ecclisse totale di sole avvenuta 60 anni avanti G. C., si scorse una grossa cometa vicino al sole. Le comete del 1402 e del 1532 e quella apparsa poco avanti alla morte di Giulio Cesare, erano tanto brillanti da poterle vedere a mezzodì ad onta della piena luce del sole.

Variatissima dev'essere la costituzione fisica delle comete. Pare verosimile che la struttura di alcuni di questi astri sia quella di un inviluppo vuoto, di forma parabolica, che verso il fondo racchiude la testa e il nucleo: è stato notato in alcune un punto stellare piccolissimo, indizio che colà si trova un corpo solido.

I movimenti delle comete quantunque irregolari in apparenza, si effettuano sopra curve allungatissime di forma ellittica iperbolica o parabolica. Il moto apparente può giungere a tal rapidità che la cometa del 1472 descrisse in un giorno soltanto un arco celeste di 120°. Le comete che hanno per orbita un'ellisse si possono considerare come appartenenti al nostro sistema planetario e tornano a mostrarsi periodicamente; postochè i loro movimenti non sieno alterati dall'influenza del pianeta. La più notevole fra esse si è quella di cui l'Halley predisse nel 1682, che ricomparirebbe nel 1759 e che si è di nuovo veduta nel 1835. Era stata già veduta nel 1609, nel 1531, 1456, e 1305 ec.

La cometa dell'Enke appellata così dal nome del celebre astronomo di Berlino che nel 1819 fu il primo a predirne il ritorno periodico; merita di esser rammentata, pel corto tempo della sua rivoluzione: questa si effettua in 1209 giorni, o 3 anni e mezzo presso a poco, sur un'ellisse eccentrica oltremodo, inclinata di circa 13° 22' sull'ecclittica.

Un'altra cometa di corto periodo porta il nome di Biela di Josephstadt, che primo ne conobbe, pochi anni sono, il ritorno periodico. In 6 anni $^3/_4$ descrisse un'ellisse mediocremente eccentrica. L'ultima volta che comparve fu nel 1838.

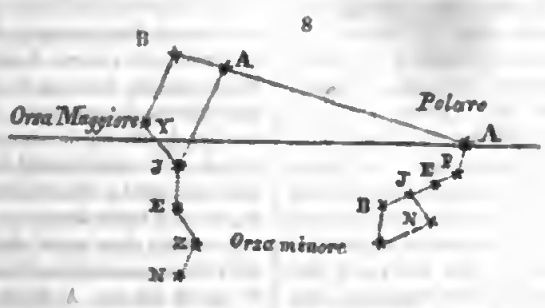
Questa cometa è senza coda e senza alcuna apparenza di nucleo solido. La sua orbita taglia il piano dall'ecclittica vicinissimo all'orbita della terra, e se al tempo del suo passaggio nel 1832, la terra fosse stata avanzata di un mese sulla sua orbita, ella avrebbe traversata la cometa: incontro singolare che forse non avrebbe potuto succedere senza pericolo.

Nel nostro sistema le comete sono i corpi più voluminosi, perocchè secondo il Newton la coda della gran cometa del 1680, tosto dopo il di lei passaggio al punto più vicino al sole, non aveva meno di 80 milioni di chilometri di lunghezza: e le più grandi sono giunte ad avere una coda lunga fino a 165 milioni: spazio che vince considerevolmente la distanza fra la terra e il sole.

COSTELLAZIONI. Poco conto fanno gli astronomi delle divisioni arbitrarie chiamate costellazioni, adoperate per riguardo al cielo fino dalla più remota antichità. Se ne servono soltanto per designare nel modo più breve le stelle più osservabili, unendo al nome della costellazione una lettera greca attribuita a ciascuna delle stelle che la compongono, come α del Leone, β dello Scorpione ec.

Il più semplice mezzo di imparare a conoscere le costellazioni consiste in servirsi di un globo celeste, che si confronta col cielo nelle diverse stagioni dell'anno. Il globo è posato sur un piede, ed è munito di due cerchi uno di rame e l'altro di zinco. Il metodo dell'allineazione, che consiste nel determinare la posizione delle stelle per mezzo di linee che si figurano passare per altre stelle cognite, rende assai facile l'uso del globo celeste. E per darne un esempio diremo, che la *stella polare* che occupa, poco più poco meno, il polo settentrionale dell'asse intorno a cui la terra eseguisce il suo movimento diurno; è situata nel prolun-

gamento di una linea retta, che si immagina proiettata sulla volta celeste, passando per le due guardie della Orsa maggiore, o del carro di Boote, costellazione a tutti ben nota.



costanze le più favorevoli non si possono scorgere ad occhio nudo che le stelle delle prime sei o sette grandezze. Coll'aiuto però dei telescopi si va molto più oltre e chi vi ha pratica può contare le stelle di sedicesima grandezza.

A parere del Littrow il numero delle stelle di prima grandezza è di 14, di quelle di seconda, 70, di terza fino a 300: il numero delle visibili ad occhio nudo, cioè a dire comprese nelle sei prime classi, è di circa 5,000: di quelle delle nove o dieci prime classi, di circa 70,000.

Ai nostri istrumenti queste grandezze non si manifestano che mediante l'intensità e non punto per un diametro apparente qualsiasi. Vuolsi anche notare che, quanto più il telescopio è perfetto, tanto più la stella tende a ridursi ad un semplice punto brillante, tale da esser totalmente occlissato anche da un semplice filo di tela di ragno. Fin ad oggi gli astronomi non si sono trovati d'accordo sulla legge delle intensità luminose delle grandezze, quantunque riconoscano, che questa legge si approssima ad una progressione geometrica di cui ogni termine sarebbe la metà del precedente.

VARIAZIONE DI LUCE NELLE STELLE. Di utilità grande sarebbe un mezzo esatto di classare le stelle a seconda dell'intensità di loro luce, come quello che servirebbe a far conoscere il cambiamento da essa subito coll'andare del tempo. I Greci vedevano di color rosso Sirio, che a noi oggidì apparisce di un bianco sfolgorante. Per gli antichi Castore era il più grande dei due Gemelli, mentre

STELLE DI DIVERSA GRANDEZZA. Le stelle sono ordinariamento classate a seconda della loro luce apparente che si nomina *grandezza*. I numeri minori spettano alle stelle meno brillanti. Nelle cir-

oggi è evidentemente minore di Polluce. La stella α dell'Idra era annoverata dagli antichi fra quelle di prima classe, mentre oggi non può considerarsi che come di seconda. Anche le 7 belle stelle dell'Orsa maggiore cambian continuamente di splendore e di tratto in tratto una di esse viene ad essere più brillante delle altre.

In certe stelle queste mutazioni di splendore e di scintillamento seguono periodicamente. La più notevole è l'o della Balena, osservata dal Fabricio nel 1596. Il suo periodo è di 334 giorni in circa. Nella sua massima coruscazione, che dura presso a 15 giorni, si direbbe ch'ella è di seconda grandezza: poi per 3 mesi dura a decrescere, e per 5 diventa totalmente inviabile; per altri 3 mesi poi accresce da capo la sua grandezza apparente. Tuttavia queste fasi non sono sempre regolari. L'Evelio riferisce, che per più di 4 anni, dall'ottobre del 1672 al dicembre 1676, scomparve affatto.

Algol o β di Perseo, sembra ordinariamente stella di seconda grandezza e tale resta per 2 giorni e 14 ore, in capo ai quali il suo brillare scema ad un tratto e in tempo di 3 ore $\frac{1}{2}$ si riduce a quarta grandezza. Allora ripiglia a crescere per giungere in termine di $3\frac{1}{2}$ alla sua solita luce: lo spazio intero del suo periodo è di circa 20 giorni, 20 ore e 48 minuti. Il Goodrike che fu il primo a notare questo fenomeno, crede che questo effetto singolare dipenda dalla presenza di un cor-

po opaco che giri attorno alla stella e venga così a interporsi fra essa e noi.

La subita apparizione di una stella l'anno 125 avanti l'era volgare decise Ipparco, dicono, a fare il catalogo delle stelle, ed è questo il più antico di cui sia fatta menzione. L'anno 389 dell'era nostra, vicino all'α dell'Aquila videsi comparire una stella che per parecchie settimane ebbe un fulgore pari a quello di Venere e poi disparve affatto. Negli anni 945, 1264 e 1572, comparvero delle stelle brillantissime nella regione del cielo che resta fra Cefeo e Cassiope, ed è probabile non fossero altro che un astro il cui periodo sarebbe di 300 anni, o di 150 secondo il Goodrike. La comparsa della stella del 1572 fu sì subitanea, che il celebre astronomo danese Tycone Brahe tornando la sera degli 11 novembre dall'osservatorio a casa, restò sorpreso a vedere una folla di curiosi che stavano a guardar questa stella, che mezz'ora fa egli non aveva veduta. Brillava allora da quanto Sirio e proseguì ad aumentar lo splendore a segno di sorpassare Giove: si vedeva fin di mezzodì; ma nel dicembre dell'anno stesso cominciò a diminuire la luce e nel marzo del seguente anno era scomparsa. Ai 10 ottobre 1604 una stella di una specie consimile apparve nella costellazione del Serpentario e si potè vedere fino all'ottobre 1605.

A dir breve, chi faccia una rivista del cielo o lo confronti coi cataloghi che ce ne restano, vedrà che vi mancano molte stelle: che anzi facendo anche la dovuta ragione degli errori corsi nei cataloghi, si dee tener per fermo, che parecchie stelle ne sono scomparse.

Repartimento delle stelle nello spazio. Le 3 o 4 prime classi di stelle compariscono disposte con una certa uniformità nella volta celeste.

Ma tenendo conto di tutte quelle che son visibili ad occhio nudo, ci si accorge che i numeri assumono un rapido accrescimento in vicinanza della *Via lattea*, fascia di un color biancastro, che solca in quasi tutta la sua lunghezza il cielo. Aggiungi, che l'accumulazione delle stelle telescopiche luogo questa zona e i due rami in cui si divide, supera l'immaginazione, talchè realmente la luce della via lattea non è che un effetto di questa agglomerazione prodigiosa di stelle la cui grandezza media può riportarsi alla decima o undecima grandezza. All'opposto, le regioni celesti corrispondenti alle estremità di un asse perpendicolare alla via lattea, in prossimità della chioma di Berenice e del Trespolo dello Scultore, sono estremamente povere di stelle. In somma la cosa sta come se le stelle fossero agglomerate in uno spazio di forma lenticolare di cui noi occuperemmo il centro, e nell'immensità del quale il nostro sole con tutto il suo sistema planetario si trovasse come disperso.

Il numero delle stelle dee tenersi come realmente infinito nel senso letterale di questa parola. Ai 22 di agosto, Guglielmo Herschel munito del suo telescopio reflessore di 6 metri di foco, vide non meno di 258,000 stelle attraversare il campo del suo cristallo in 41 minuto di tempo, ed è da tenersi per indubitato che noi non vediamo che quella porzione di cielo che è più prossima a noi. Che sarebbe dunque se ci fosse dato di aumentare ancora la forza dei nostri strumenti ottici!

Nebulose. In diversi punti del cielo si distinguono delle macchie luminose di forma più o meno regolare, di cui alcune richiamano in modo maraviglioso la costituzione della nostra Via lattea. Tale è la *nebulosa* situata presso alla stella ν della costellazione di Andromeda. Si può vedere ad occhio nudo, e chi non ha pratica dell'aspetto del cielo la piglia per una cometa. Ce ne potremo fare un'idea chiara immaginandoci che la figura della cometa che sopra abbiamo data, abbia preso una forma simmetrica ai due lati di un asse perpendicolare a questa figura pel lungo, e che l'intensità della luce di questa figura vada diminuendo dal centro verso i lembi. Simone Mario che la indicò nel 1612, la confrontò, e a ragione, con un lume di candela veduto attraverso di una lastra di corno. Di lunghezza ha quasi un mezzo grado, e da 15 a 20 minuti di larghezza. Al Littrow par probabile che questa nebulosa e tutte quelle che hanno una forma analoga ad essa, sieno composte di un ammasso di stelle poste ad una distanza prodigiosa da noi. Alcune fra esse sono probabilmente 10,000 volte più lontane che le stelle più vicine al no-

stro sole, e per conseguenza la loro luce non impiega meno di 92,500 anni per giungere a noi. Ora, posta tal distanza, la nostra Via lattea occuperebbe appena lo spazio di $\frac{1}{a}$ di secondo sulla volta celeste, e conseguentemente per noi sarebbe invisibile.

Le nebulose hanno una grande varietà di aspetto. Fra le più ragguardevoli si distingue quella di Orione scoperta dall'Huygens nel 1656, e l'altra scoperta dal Lacaille presso la stella π, nella costellazione australe, la Querce di Carlo. La prima ha l'apparenza di piccole masse o fiocchi nebulosi che verso i loro lembi sembrano aderire a una quantità di piccole stelle, e notatamente a una stella cospicua da un'atmosfera nebulosa di una estensione e di una figura singolare. Alcuni astronomi e quelli in specie del Collegio romano, confrontando questa nebulosa colle diverse figure che ne sono state date, ne hanno concluso, che subisca nella sua forma dei cambiamenti sensibili ed anche rapidi; ma l'Arago, e l'Herschell non tengono questo fatto come certo ed inchinano piuttosto ad attribuire alle variazioni atmosferiche e ad altre cause congeneri, le differenze mentovate.

È da notare che, a proporzione che si adoperano strumenti di una forza considerevolmente amplificante, si trovano in maggior numero delle nebulose *risolubili*, quelle cioè in cui si può distinguere un ammasso di stelle. La figura qui sotto riporta la decimaterza delle centotrè nebulose, di cui il Messier ha dato la lista, e che dopo essere stata descritta da esso come una nebulosa senza stella, è stata veduta nel modo che qui dall'Herschell

9

col suo gran telescopio. Questa gran nebulosa notata per la prima volta dall'Halley nel 1714, è visibile ad occhio nudo fra le stelle η e ζ di Ercole. Veduta con cannocchiale ordinario da notte rassomiglia a una piccola cometa rotonda.

Fra le non risolubili Guglielmo Herschel distingue:

1° Le nebulose planetarie
2° Le nebulose stellari
3° Le stelle nebulose.

Le prime, cioè le nebulose planetarie, sono oggetti stranissimi a cui il loro disco rotondo o un poco ovale, qualche volta contornato nettamente, qualche altra un poco caliginoso negli orli, dà una certa somiglianza coi pianeti. La loro luce è perfettamente uniforme o pochissimo variata, e qualche volta si avvicina pel suo splendore a quella dei veri pianeti: hanno poi una dimensione enorme; ed una di esse con un diametro apparente di circa 20″ si vede presso all'ν dell'Aquario: un'altra in Andromeda ha un disco di 12″ tondo perfettamente e ben contornato. Posto che fossero alla medesima distanza

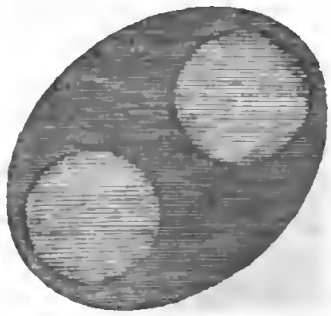
da noi che le stelle, il loro diametro reale sarebbe uguale per lo meno a quello dell'orbita di Urano: e qualora il lume intrinseco della loro superficie non fosse avventizio, non può che essere inferiore di assai a quello del sole: perocchè questi corpi sono appena visibili ad occhio nudo, mentre che se il sole fosse dilontanato tanto che il suo diametro apparente fosse di 20″, darebbe un lume uguale a quello di cento lune piene.

Le nebulose stellari sono analoghe a quella di ν di Andromeda, con figura rotonda o ovale e una luce che va aumentando d'intensità da' lembi al centro si da offrire l'apparenza di una stella pallida o leggermente velata.

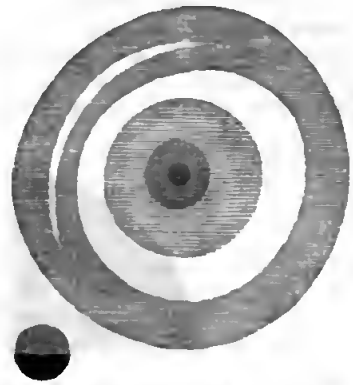
Le stelle nebulose, all'opposto, offrono il bel fenomeno di una stella chiara e brillante, cinta di un disco perfettamente circolare, o di un atmosfera qualche volta debolmente luminosa, e decrescente insensibilmente in tutti i versi, qualche sitra, terminata ad un tratto: di tal fatta sono la stella 55 di Andromeda ed ε e ι d'Orione.

Fra le nebulose dotate di una forma evidentemente simmetrica, le più notevoli sono la 27ª e la 52ª del catalogo di Messier, la cui figura qui si riporta.

40



41



La prima situata nella costellazione della Volpe, consiste in due nebulose brillanti, tonde o pochissimo ovali, condensate in alto grado, inviluppate in un'atmosfera nebulosa, più oscura, della figura d'un'ellisse circoscritta. La seconda posta nella testa del Cane da caccia settentrionale, consiste in una nebulosità globulare ampia e brillante, cinta da un anello diviso per i due quinti di sua circonferenza in due lame di cui l'una sembra inclinata sul piano dell'anello. Un'altra piccola nebulosa rotonda, simile ad un satellite, si trova in vicinanza dell'anello.

Anche il nostro sole pare si debba annoverare nella classe delle nebulose: tanto resulta dalla luce detta zodiscale che si mostra nelle belle giornate tosto dopo il tramontare del sole, nei mesi di aprile e di maggio; o immediatamente avanti il levar del sole nella stagione contraria alla sopraddetta, sotto forma lenticolare, in una direzione generalmente conforme a quella dell'equatore del sole. La distanza angolare apparente dal sole alla cima, varia da 40 a 90°, e la larghezza della base perpendicolare all'asse, da 8 a 30°. Questa luce nei nostri climi è assai debole e mal contornata, ma molto meglio si vede nelle regioni prossime all'equatore terrestre.

STELLE DOPPIE E MULTIPLE. Esaminandole col telescopio, molte stelle si riscontrano doppie o multiple cioè a dire si risolvono in due o più stelle vicinissime. Fra le stelle delle sei prime grandezze se ne incontra una doppia fra 10 scempie: dalla sesta alla nona grandezza una doppia ogni 26: e nelle grandezze inferiori, una doppia ogni 43. Le regioni del cielo le più povere di stelle scempie, lo sono anche di stelle doppie: tuttavia le costellazioni di Perseo, del Capricorno, della Mosca, dei Gemelli, e sopra tutte quella di Orione, le quali restano dalla parte di fuori della Via lattea, sono ricchissime in stelle doppie.

Fra le triple, una se ne distingue in Orione composta di due stelle di settima ed una di decima grandezza: una nella Lince: la ζ del Cancro, la ξ della Libra, due nel Toro: la ψ di Cassiope ec.

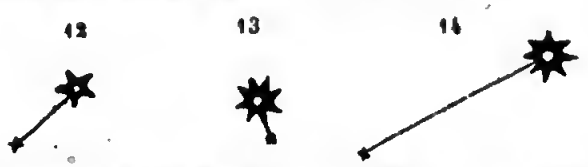
In Orione θ è quadrupla e le quattro stelle formano un quadrato quasi regolare. Recentemente lo Struve ha scoperto in mezzo al quadrato una quinta stella piccola, che in seguito è divenuta sì luminosa che può facilmente scorgersi da chiunque l'osservi con un buon telescopio. Certo è dunque non aver cominciato questa stella ad esistere che negli ultimi tempi, e che ora va crescendo.

Lo Struve ha pure riconosciuto che σ di Orione posta immediatamente sotto la più bassa delle tre stelle, designate col nome di Verga di Giacobbo, consta di sedici altre stelle.

Mediante l'osservazione si è riconosciuto che la più parte delle stelle multiple formano realmente dei gruppi e parte; nè è un semplice effetto di ottica che le ravvicini, perchè le distanza angolari di queste stelle, la direzione dei loro allineamento rispetto alla verticale, variano in modo, che l'una descrive attorno all'altra un'ellisse di cui la prima occupa uno dei fuochi. Si deve al Savary il primo metodo di calcolo per la determinazione dell'orbite delle stelle doppie. L'applicazione di tal metodo ha condotto questo bravo astronomo ad assegnare un periodo di 61 anno incirca alla durata della rotazione di una stella attorno all'altra, per la ξ dell'Orsa maggiore. Un'altra maniera di calcolo ha dato all'Henke direttore dell'Osservatorio di Berlino, un'orbita descritta in 80 anni circa per 70 di Ofiuco o Serpentario.

La lunghezza dei periodi di alcuni di questi astri non è meno osservabile della brevità di quelli che abbiamo citati: per esempio nel γ del Leone la rivoluzione non si compie che in 1200 anni.

Il più delle volte le due stelle, di cui consta una stella doppia, sono di differente grandezza, come può vedersi nelle figure sottostanti.



La prima si risolve in due stelle, l'una di terza, l'altra di quarta grandezza: la seconda in due stelle di prima e decima grandezza: la terza in due stelle di prima e decimaquinta grandezza. Qualche volta le due stelle son di quasi eguale grandezza, tali sono quelle di Castore ambedue di terza: e quelle di γ del Capricorno entrambe di quinta grandezza.

Gran numero di stelle doppie offre dei curiosi contrasti di colore: per lo più la maggiore è di color rosso o arancio, mentre la minore par cerulea o verde. Ora se questi contrasti non sono effatto di un'illusione ottica, che spettacolo magnifico non debbon presentare ai pianeti da loro illuminati questi soli rossi e verdi, che ora compariscono sullo stesso orizzonte, ora l'uno all'altro si succedono!

STELLE CADENTI Così chiamansi quei fuochi chiari e rapidi, che si accendono ad un tratto in mezzo alle tenebre ed hanno l'apparenza di tante stelle che si stacchino dalla volta celeste per cadere in varie direzioni verso la superficie della Terra. Quelli poi che hanno un diametro bastevolmente considerevole da presentar l'aspetto di un globo di fuoco, si chiaman Bolidi. Un solco di luce segna per lo più la strada percorsa dalla meteora.

La periodicità nelle apparizioni di stelle cadenti oggidì è constatata: le epoche più notevoli sono dal 10 al 16 novembre, ritorno ai 10 di agosto, ai 7 dicembre ec. Più di una volta è avvenuto, e notatamente nelle due prime epoche mentovate, di vedere delle vere pioggie di stelle

cadenti. Tale fu quello che l'illustre viaggiatore Humboldt vide in America la notta dagli 11 ai 12 novembre 1799. Ma il fenomeno accade spesso senza giungere a questo segno. A parere del Quetelet, il numero delle stelle cadenti è di 8 l'ora, prendendo una media proporzionale, vedute da un osservatore isolato, o da più osservatori che guardino la medesima regione del cielo: ma questo numero giunge al doppio se essi spartiscansi l'ispezione della volta celeste. In un'apparizione straordinaria, l'Herschell juniore è di parere che il numero delle stelle cadenti debba giungere al doppio per lo meno, cioè a dire di più di 32 per tutto il cielo.

Si attribuiscono generalmente le stelle cadenti alla medesima causa degli *aeroliti* o pietre cadute dal cielo: si crede che provengano da migliaia di asteroidi che si muovono attorno al Sole, le cui orbite tagliano quelle della terra in vicinanza dei punti ove questa si trova verso le tre epoche sopra notate. Resulta dal catalogo il più completo delle cadute di aeroliti, che il maggior numero di queste pietre meteoriche cade nel novembre, e specialmente verso il 10.

Conviene far menzione delle analogie notevoli che diversi osservatori e fisici, come il Cassini, De Maran, Biot, Quetelet ec. hanno trovate fra questi gruppi di asteroidi che si muovono attorno al Sole, e le aurore boreali. Aggiungeremo che alla stessa causa si potrebbe attribuire l'apparizione sì controversa di un preteso satellite di Venere. Perchè se la luce zodiacale che si stende oltre le orbite di Mercurio e di Venere è formata, secondo l'opinione del Cassini, da una quantità di asteroidi, se ne possono dare di quelli che siensi trovati vicini a Venere e che abbiano così presentata l'apparenza di un satellite di questo pianeta, nel presentare la medesima fase.

§ 2. *Leggi dei movimenti reali degli astri.*

Leggi di Keplero. I. I pianeti si muovono su curve piane, e i raggi vettori condotti dai loro centri al centro del Sole, descrivono attorno a quest'astro delle arce proporzionali al tempo.

II. Le orbite descritte dai centri dei pianeti, sono tante ellissi di cui il Sole occupa uno dei fuochi.

III. I quadrati dei tempi delle rivoluzioni dei pianeti attorno al Sole, sono nello stesso rapporto che i cubi dei grandi assi delle loro orbite.

Le due seconde sono applicabili ai moti dei satelliti del pari che a quelli dei pianeti, facendo astrazione dalle *perturbazioni* che risultano da certe cause di cui diremo in breve. Ma la terza legge non è che approssimativa, e si troverebbe in difetto qualora le masse dei pianeti non fossero infinitamente piccole per rapporto a quella del Sole: e conseguentemente alla deve essere modificata quanto ai satelliti aventi una massa sensibile a confronto di quella del pianeta principale.

Attrazione e gravità universale. Dalla prima legge di Keplero si può dedurre l'esistenza di una forza diretta verso il centro del Sole. La legge del moto ellittico, o l'espressione della celerità che da questa è dalla precedente legge si deduce, dà a vedere che l'intensità di questa forza varia, quanto allo stesso pianeta, in ragione inversa del quadrato della distanza dal Sole. Finalmente la 3ª legge del Keplero mostra che ad ugual distanza del centro del Sole, l'intensità della forza motrice è proporzionale alla massa di ciascun pianeta e indipendente dalla natura particolare del pianeta stesso.

Tali sono le conseguenze che il Newton ha dimostrate analiticamente nei suoi principii e nello quali ha fondato la sua teoria della gravità universale che è il più bel fregio della sua gloria.

Tutti i corpi in natura si attraggono vicendevolmente in ragion diretta delle masse e in ragione inversa del quadrato delle distanze. Questa è la gran legge che il Newton ha messa fuori di dubbio, non solo per deduzioni tratte dalle leggi del Keplero, ma anche con una dimostrazione diretta. E di fatti, ammesso questo principio, se ne deducono, coi metodi adoperati nella meccanica, delle leggi generali, di cui quelle del Keplero non sono che casi particolari.

Il Newton ha dimostrato primieramente, che, dove due corpi sferici sieno sollecitati da una consimil forza attrattiva, ognuno di essi descrive attorno all'altro,

considerato come immobile, anzi tutti e due descrivono attorno al loro centro comune di gravità, delle curve concave, le quali sono una delle tre sezioni coniche, in uno dei fuochi delle quali sta il centro di gravità. La curva sarà, in ogni caso particolare, un'ellisse, un'iperbole, o una parabola, secondo i rapporti di celerità, distanza e direzione: e le eccentricità potranno avere un valore qualunque a seconda delle medesime circostanze. In ogni caso la celerità angolare colla quale si muove la linea che unisce i centri, sarà in ragione inversa del quadrato della loro mutua distanza, e le aree descritte da questa linea saranno uguali in tempi uguali. Finalmente il rapporto del quadrato del tempo della rivoluzione d'uno dei due corpi al cubo del grand'asse, nel caso del moto ellittico, sarà uguale a una quantità costante divisa per la somma delle masse dei due corpi. Questo rapporto sarà dunque sensibilmente costante se l'una delle due masse è sempre estremamente piccola in faccia all'altra. Ciò segue pel sistema solare, in cui la massa più grande, qual'è quella di Giove, non giunge ad un millesimo di quella del Sole.

I moti delle comete soddisfano, per alcune almeno, sopra delle orbite iperboliche o paraboliche, in quelli delle stelle doppie si osserva una proporzione fra le aree e i tempi: a buon diritto dunque la legge dell'attrazione può proclamarsi per *universale*, poichè si vede costante fino ai confini dell'universo visibile.

Perturbazioni. Ma i corpi celesti agiscon gli uni sugli altri e sul Sole stesso: da queste attrazioni diverse resultano certe perturbazioni nei loro moti, che le osservazioni conducono a congetturare. Le perturbazioni del moto ellittico dei pianeti sono di due sorte:

1° *Ineguaglianze secolari* che risguardano gli elementi del moto ellittico e crescono con estrema lentezza.

2° *Ineguaglianze periodiche* di un periodo molto più breve che le secolari, e che dipendendo dalla configurazione dei pianeti, tanto fra loro, quanto per rapporto ai principali punti delle loro orbite: queste si riordinano ogni qualvolta queste configurazioni diventano le medesime.

Tutti gli elementi delle ellissi planetarie sono variabili. Questo ellissi si avvicinano o si allontanano insensibilmente dalla forma circolare: le loro inclinazioni sul piano fisso o sull'ecclittica aumentano o scemano: i loro *perielii*, cioè a dire i punti delle loro orbite più vicini al Sole, e i loro *nodi*, cioè i punti ove i piani delle loro orbite tagliano l'ecclittica, sono sempre in moto. Ma è stato dimostrato dal Lagrange che i moti medii dei pianeti, le loro distanze medie dal sole, ossia i grandi assi delle loro orbite, sono invariabili: e questi elementi che si trovan sempre costanti costituiscono uno dei fenomeni i più riguardevoli nel sistema del mondo.

Il Laplace e il Lagrange hanno parimente dimostrato che qualunque sieno le masse dei pianeti, perciò stesso che si muovono nella stessa direzione e in dei cerchi poco eccentrici e poco inclinati gli uni sugli altri; le loro ineguaglianze secolari sono periodiche e racchiuse in istretti limiti: dimodochè il sistema planetario non fa che oscillare attorno ad uno stato medio, da cui non si allontana mai che di una piccola quantità. I recenti calcoli del Le Verrier, inoltrati ad un grado di probabilità molto maggiore di quei del Laplace, hanno eppiano confermato queste leggi ammirabili e provvidenziali, mercè le quali il globo terrestre sarà sempremai preservato da variazioni notevoli di media temperatura, che potrebbero nuocere al libero sviluppo della specie umana.

Le più considerevoli fra le perturbazioni subite dal globo terrestre, producono la *precessione degli equinozi* e la *nutazione*. Sta la prima in una retrogradazione continua dei nodi dell'equatore terrestre sull'ecclittica, ed è conseguenza della combinazione del moto di rotazione della terra attorno al suo asse, coll'azione perturbatrice del Sole e della Luna sopra gli strati di materia accumulati attorno all'equatore terrestre, e senza dei quali la terra avrebbe una forma perfettamente sferica. La retrogradazione è di 50″,10 per anno, e percorre il giro intero dell'ecclittica in un periodo di 25, 868 anni. La nutazione dell'asse terrestre è un piccolo moto, subordinato alla precessione, in virtù del quale se fosse solo, e non combinato con altri moti, il polo descriverebbe nelle spazie di 19 anni circa, una pic-

cola ellisse, il cui grand' asse sarebbe di 18″, 5, e il piccolo di 13″, 74: il grande avende la direzione verso il pole dell' ecclittica, il piccolo nella direzione perpendicolare.

Legge di Bode. Sotto il nome di legge di Bode astronome berlinese, s' intende una regola importantissima stata da lui osservata fra le differenti distanze dei pianeti dal sole.

Ai numeri

0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192,

la cui progressione facilmente si comprende, aggiungendo il numero 4, si ottiene la serie

4, 7, 10, 16, 28, 52, 100, 196,

la quale esprime la distanza dal Sole si pianeti Mercurio, Venere, Terra, Marte, Cerere, Giove, Saturno, Urano. Quando questa legge fu fatta conescere, si notò una lacuna fra Marte e Giove, e si enngetturò che in questo spazio poteva esistere un pianeta e questa congettura ebbe un avveramento singolare quando furono scoperti 4 da prima nuovi pianeti invece di un solo. Si osservò dipoi che le loro distanze, potendosi esprimere mediante i numeri 24, 27, 28 e 28, differiscon poco fra loro, e che le loro orbite, in su colla loro configurazione, sembrano indicare come essi provengano da un solo pianeta fatto in pezzi da qualche causa sconosciuta, in seno allo spazio. La scoperta di Urano, e di Nettuno è posteriore alla pubblicazione della legge di Bode, ed ha servito di una conferma non meno singolare.

I satelliti di Giove son disposti secondo una legge analoga; perocchè aggiungendo 3 ai numeri della serie

3, 6, 12, 24

si ha

6, 9, 15, 27

che esprimono le distanze di questi satelliti dal pianeta. E quello che più fa meraviglia si è, che diminuendo di $\frac{1}{5}$ nguno dei numeri che esprimono le distanze esatte dal pianeta, si trova la serie

4, 7, 10, 18

che non differisce che per l' ultimo numero dalla serie

4, 7, 10, 16

già notata.

Per i satelliti di Saturno si prenderà la serie

0, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,

e si accrescerà di 3 ogni numero, lo che darà

3, 4, 5, 7, 11, 19, 35, 67:

e queste sono precisamente le distanze dei satelliti del pianeta, tranne il penultimo numero cioè 35, a cui corrisponde una lacuna fra il 6°, e il 7°.

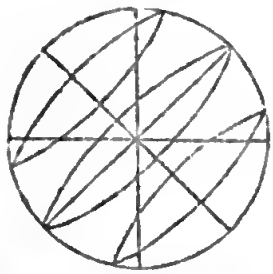
§ 3. *Moti apparenti dei corpi celesti.*

Moti diurni del cielo. In virtù del moto uniforme di rotazione della terra intorno al sue asse, pare che tutti gli astri descrivano nella volta celeste degli archi di cerchie perpendicolari a quest' asse. I più vicini al polo descrivono delle circonferenze di raggi più piccoli: quei che restano a 90° dal polo descrivono una circonferenza del più gran raggio. Ma le distanze respettive delle stelle fra loro rimangono le medesime come se queste stelle fossero invariabilmente fisse alla volta celeste, e le traslocazioni angolari che subiscone nel girare insiem con questa, sono di una perfetta uniformità.

Gli astri dotati di un mevimento proprie come i pianeti, il Sole, la Luna ecnel tempo che partecipano alla rotazione diurna, per un effetto combinato del loro moto con questa rotazione, si allontanano più o mene dalla via perfettamente circolare e uniforme che avrebber tenuta senza questa causa particolare.

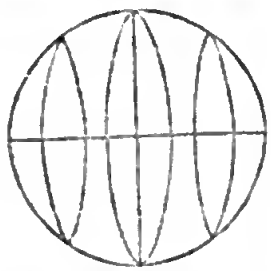
Tutti i luoghi situati fra 'l polo e l' equatore hanno la *sfera obliqua*, cioè a dire che l' asse della terra è obliquo per rapporte al loro *orizzonte* come dimostra la figura. Orizzonte è chiamato un cerchio grande che passa pel centro della terra perpendicolarmente al raggio che unisce il punto che si considera, al centro della sfera. Nella sfera obliqua le stelle circumpolari la cui distauza angolare dal polo è minore dell' inclinazione dell' asse terrestre sull' orizzonte, e della distanza angolare del dato luogo dall' equatore, non discendon mai sotto l' orizzonte. Tutte le stelle la cui distanza a mezzodì dall' equatore, eccede il complemento dell' altezza del polo al di sopra dell' orizzonte, sono invisibili e non si levan mai sopra di esso.

17



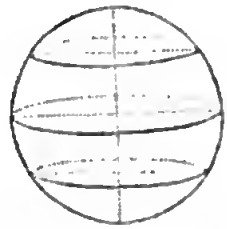
I punti dell'equatore terrestre hanno la sfera retta, cioè a dire che tutte le stelle vi sono visibili e che descrivono dei semicerchi i cui piani son perpendicolari

18



all'orizzonte, come nella figura qui sopra. A ciascuno dei poli terrestri la sfera si chiama *parallela* perchè sono visibili soltanto le stelle di uno dei due emisferi, e descrivono dei cerchi paralleli all'orizzonte, come vedesi nella sottoposta figura.

19

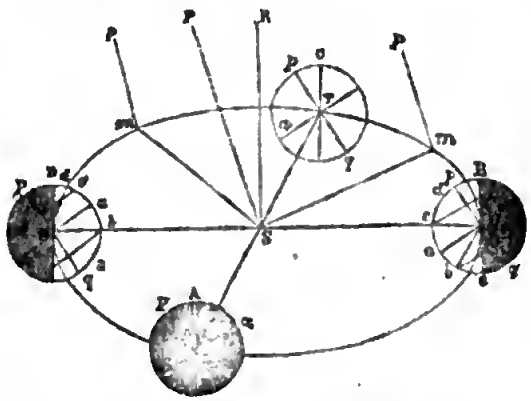


MOTO ANNUO. La combinazione del moto di progressione annuo della terra nella sua orbita col suo moto di rotazione, avute riguardo all'inclinazione dell'asse, dà la spiegazione delle stagioni.

Siano rappresentati nella figura seguente in S il Sole e in A, B, C, D quattro posizioni della terra intorno alla sua orbita, a 90° di distanza l'una dall'altra:

Vedesi facilmente dalla figura come un gran cerchio perpendicolare ai raggi vettore ST, separa sempre la parte illuminata da quella che non le è. Nelle posizioni A e C che corrispondono respettivamente ai **21 marzo** e ai **21 settembre**, ossia all'**equinozio** di primavera e a quello di autunno, il sole trovandosi all'intersezione dell'equatore T *a* e dell'ecclittica; si fa giorno nel medesimo tempo per ciascuno dei due emisferi *boreale* ed *australe* (settentrione e mezzodì), e l'arco diurno descritto dal sole essendo un semicerchio, il giorno è uguale alla notte su tutta la terra.

20



Dopo l'equinozio di primavera, la terra passando in B al solstizio di estate, il sole, ai 21 giugno, sembra descrivere un piccolo cerchio, che è lontano dall'equatore di una distanza angolare *ac* uguale al complemento dell'inclinazione dell'asse

della terra sul piano dell' ecclittica. Questo cerchio porta il nome di *tropico del Cancro*. Il giorno allora ha la sua massima lunghezza, perchè la porzione di questo circolo che è a sinistra del piano B *e* di separazione, fra l' emisfero illuminato e l' emisfero oscuro, è un maximum.

I giorni che sono andati aumentando per l' emisfero settentrionale di A in B, vanno ora diminuendo nello stesso modo di B in C. L' altezza del Sole diminuisce pure per questo emisfero, come era cresciuta per l' avanti.

Da C in D il sole passa al mezzodì dell' equatore e descrive degli archi sempre più piccoli per l' emisfero boreale, che però diventano sempre più grandi per l' emisfero australe. In D il cerchio descritto dal Sole è perpendicolare all' asse *p q* della terra, e condotto dal punto *b* a una distanza *o b* dall' equatore uguale ad *a c* o di 23° 28'. Questo cerchio è il *tropico del Capricorno* e corrisponde al *solstizio d' inverno*. Allora il sole giunge alla sua minima altezza per tutte le contrade dell' emisfero boreale. I giorni dunque vanno diminuendo costantemente per questo emisfero, di C in D, dal 21 settembre fino al 21 dicembre.

Da D in A dal 21 dicembre al 31 marzo, i giorni e l' altezza del sole sopra l' orizzonte crescon di nuovo, nello stesso modo che eran diminuiti di C in D.

Per tutte le regioni dell' emisfero australe i medesimi fenomeni si presentano in ordine inverso: ma è da osservare come in virtù dell' eccentricità dell' orbita terrestre, la distanza ST essendo più grande, quando la terra è in B che quando è in D; a seconda della prima legge del Kepiero, il tempo che impiega per andare da A in B e di B in C è più lungo che quello che ella impiega per passare da C in D, e da D in A. La nostra primavera perciò e la nostra estate riuniti insieme sono più lunghi che l' autunno e l' inverno, e il sole rimane nel nostro emisfero qualche giorno più che nell' emisfero australe.

Per terminare di dare ad intendere la figura che sopra, aggiungeremo che SR rappresenta un asse perpendicolare all' ecclittica, e SP una retta che con quest' asse forma un angolo di 23° 28. L' asse della terra in tutte le posizioni possibili *m p* è costantemente parallelo a SP. Se gli archi *p d*, *q e* sono uguali a questo medesimo angolo, i piccoli cerchi tracciati sulla superficie del globo perpendicolarmente all' asse *p q*, son chiamati *cerchi polari; artico* dicendosi quello dell' emisfero boreale, *antartico* quello dell' australe.

Per tutti i paesi della terra, compresi fra l' uno dei tropici e il cerchio polare più vicino, i giorni e le notti sono ineguali fuorichè negli equinozi; il giorno e la notte più lunghi sono di meno che 24 ore, e vi ha tanta minore ineguaglianza fra i più lunghi e i più corti, quanto più ci si avvicina al tropico.

Nelle regioni racchiuse fra i due tropici, vi ha sempre poca disuguaglianza tra i giorni. Il sole a mezzodì giunge ad una grande altezza, e due volte l' anno passa alla *zenith*, cioè a dire al punto del cielo dove va a finire la verticale o perpendicolare all'orizzonte condotta pel centro della terra.

Ai tropici il passaggio del sole alla zenith non succede che una volta l' anno.

Su tutti i punti dell' equatore i giorni sono costantemente uguali alle notti.

Ai cerchi polari la notte e il giorno più lunghi sono di 24 ore.

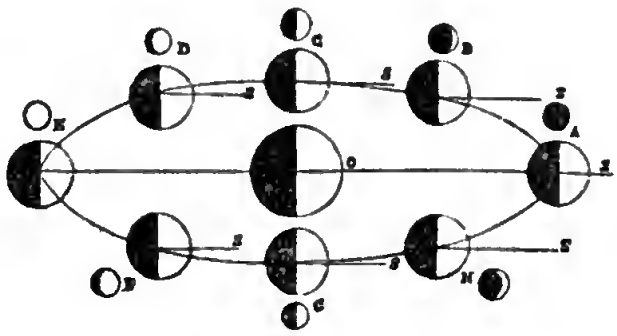
Fra ogni cerchio polare e il polo, la lunghezza del giorno verso l' uno dei solstizi, e delle notti verso l' altro, va continuamente aumentando. Al polo finalmente l' anno si compone, quasi per ugual parte, di un giorno e di una notte di sei mesi.

Dal moto della terra attorno al sole resulta un moto apparente del sole intorno alla terra, dimodochè pare che questo percorra sull' ecclittica uno spazio angolare precisamente uguale, e opposto pel vertice, a quello che la terra realmente percorre. Il fenomeno dell' *aberrazione* è conseguenza del moto della terra, e consiste nel sembrar che le stelle descrivano annualmente attorno alla loro posizione media, una piccola ellisse: ciò consegue dalla combinazione della celerità della luce con quella della terra sulla sua orbita, la quale è 10,000 volte minore della prima.

Le stazioni e *retrogradazioni* dei pianeti si spiegano con altrettanta facilità, mediante la combinazione dei loro moti

con quelle della terra. I pianeti inferieri, Mercurio e Venere noe si allontanan mai troppo dal sole. La lore massima *elongazione* o distanza angolare da quest'astro, non passa mai 29° per Mercurie e 47° per Venere.

FASI DELLA LUNA E DEI PIANETI. La retazione della Luna attorno alla terra, e la gran lentananza del Sole per rispetto all'una o all'altra spiegano perfettamente le fasi della Luna. Si esservi la sottoposta figura. O rappresenta la terra, e A, B, C, D, E, F, G, H acce divorse pozizioni della Luna nella sua erbita. Sopra il globo lenare sono effigiate in più piccola proporzione ie diverse apparenze n *fasi*, che corrispondeno a queste posizioni.



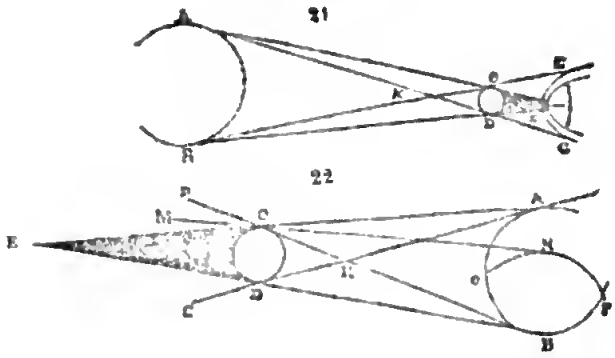
I raggi solari si pesson considerare come aensibilmente paralleli a una medesima direzione S, perchè il aeie è 400 volte più lontano dalla terra che la luna, L'emisfero rivolto verso il aole, cioè a dire a diritta della figura, resterà illuminate in tutti i punti dell'orbita, e l'emisfere opposto rimane oscuro. Nella posizione A, quaedo la Luna è in congiunzione col Sole o l'emisforo oscuro è completamente rivolto verso la terra, la Luna è invisibile e si chiama *nuova*. In capo a tre giorni e $\frac{1}{3}$, la Luna essendo in B una porzione dell'emisforo illuminato diviene visibile. Quande è in C, e si dice il ane *primo quarto*, vedesi la metà di questo emisfero; in D se no vedono i 3 quarti. In E la Luna è in *opposizione* e dicesi *piena*. Venuta ai punti F, G, H presenta successivamente le atesae apparenze che ai punti D, C, B e torna ad essere inviaibile nel punto A.

Per determinare la parte viaibile in ciascuna di queste posizioni, bisogna figurarai nel globo innare un gran cerchie perpendicolare al raggie condetto dai centre della terra a queilo della Luna. La porzione rischiarata dell'emisfero situate davanti a queste piano, sarà la sola che si scergo dalla terra. Allora faciio è il comprendere che la Luna falcata ha sempre lo *corna* epposte al Sole.

Facile pure è il comprendere perchè i pianoti inferiori, Mercurio e Venere sieno i soli ad avere fasi complete, e eeme la lentananza dei superiori che vengon depo Marte, renda insensibili le variazioni di grandezza cagionate dalle fasi.

ECCLISSI. Le figure che riportiamo nella pagina aegueete danno la spiegazione delle eccilaai, la prima, del Sole; la secenda, della Luna.

Sia AB un corpo aferice luminoso, come il Solu, e CD un aitro corpe aferico opaco, como la terra nella prima figura, o la Luna nella aecenda. Siccome si possen aempre condurre a due eircoli duc aistemi di tangenti comuei, cioè l'eno ECA, EDB, il cui incrociamento succede al di là dei due cerchi: l'aitre DKA, CKB, la cni intorsezione si fa fra i due cerchi; i punti E e K sono i vortici di due coni tangenti aile due superficio aferiche in un tempo medesimo. La afera CD porta verse il vortice E del primo cono una parte totalmente oscura, che cnatituisce *l'ombra* propriamente detta, e da niun punto di esso si può vedere il corpo illuminante AB. Ma tra la punta conica



che termina questʼombra e lʼaltra superficie conica da cui partono DG, CF, vi ha uno spazio detto *penombra*, che non sarà illuminato che da una porzione del corpo luminoso tanto più grande, quanto più ci avvicineremo agli orli estremi di questa penombra: e perciò uno spettatore situato in M vedrà la porzione AONP del disco solare, e la porzione BONP gli resterà celata.

Le ecclissi di Luna sono o *totali* o *parziali*: quelle del Sole possono essere inoltre *annulari*, lo che segue quando il vertice E del cono di ombra non arriva alla superficie della terra. Allora un osservatore situato in prossimità del prolungamento dell'asse di questo cono, vedrà il disco intero della Luna nel Sole, che lo sopravanza da tutte le parti.

Gli ecclissi si ripetono presso a poco, col medesimo ordine e le medesime grandezze, in capo a 223 *lunazioni*, ossia di giorni 6585, 78 ovvero 18 anni, e 10 giorni circa.

PARALLASSE E REFRAZIONE. La metà dell'angolo sotto il quale sarebbe veduto da un astro il globo terrestre, si chiama *parallasse* di quest'asse. La conoscenza della parallasse e del raggio terrestre basta per determinare la distanza di un astro dalla terra. Ma a misura che questa distanza aumenta, la determinazione della parallasse presenta maggiori difficoltà. Pel sole non è che di $8''$, 6 a un decimo di secondo press'a poco. Quanto alle stelle fisse è assolutamente insensibile, non solo quando si prende per base il raggio della terra, ma anche quando questa base diventa il grand'asse dell'orbita terrestre, che ha più di 300 milioni di chilometri. Nonostante il Bessel ci ha dato la misura della parallasse annua della 61me del cigno, che ha trovato di $0''$, 3483: questa parallasse corrisponde alla distanza spaventevole di 592 200 volte il raggio dell'orbita terrestre, distanza che la luce non attraversa che in 9 anni e $\frac{1}{4}$, a ragione di 300000 chilometri in circa per secondo.

Per gli astri più vicini a noi, la Luna soprattutti, l'effetto della parallasse è di fargli comparire nell'orizzonte *sensibile* di un osservatore situato sulla superficie della terra, meno elevati di quello che non lo sieno sull'orizzonte *razionale*, passando pel centro della terra, al quale gli astronomi riportano tutti i loro calcoli. Per un effetto contrario, i raggi luminosi che emanano dall'astro nell'entrare nell'atmosfera terrestre, subiscono un'inflessione che si chiama *refrazione*, in virtù di cui sembrano più elevati sull'orizzonte che non lo sieno realmente. Sono state fatte delle tavole coll'aiuto delle quali si possono correggere le altezze apparenti degli astri sopra l'orizzonte, dagli effetti della parallasse e della refrazione.

Alla refrazione atmosferica è dovuto il *crepuscolo* che dura fino a tanto che il Sole non giunge ai 18 gradi sotto l'orizzonte.

§ 4. *Astronomia pratica e tavole astronomiche.*

PUNTI NOTABILI, CERCHI E MISURE SULLA SUPERFICIE DELLA SFERA. Sulla superficie della sfera tanto terrestre che

celeste, si sono immeginati differenti punti, circoli o archi di circolo che meritano osservazione, a che qui diamo a conoscere.

1° I *poli* o estremità *dell' asse terrestre*, detto pure *asse del mondo*, perchè la terra può considerarsi come occupante sensibilmente il centro del mondo stellare: i poli del cielo, che sono i punti ove l'asse del mondo incontra la sfera celeste.

2° Lo *zenith* e il *nadir* punto ad esso diametralmente opposto. Questi due punti sono i poli dell' *orizzonte razionale*.

3° I circoli *verticali o azimuttali* o semplicemente *verticali*, che sono tracciati sulla superficie della sfera celeste, passando per lo zenith e nadir e che per conseguenza son perpendicolari all' orizzonte. Su questi circoli si misurano le *altezze* angolari dei corpi celesti sopra l' orizzonte. I complementi di queste altezze si dicono *distanze zenittali*.

4° L' *equatore terrestre*, il cui piano prolungato determina nel cielo l' *equatore celeste*, o *circolo equinoziale*. Divide pure la terra in due *emisferi*, il *boreale* ov' è situata l' Europa, e l' *australe*.

5° I *meridiani terrestri*, circoli grandi che passan per l' asse della terra. I loro prolungamenti nel cielo determinano i *meridiani celesti*, o *circoli orari*: gli angoli formati fra loro si dicono *angoli orari*. Il meridiano di un luogo è perpendicolare all' orizzonte e passa per lo zenith. L' intersezione del meridiano con un piano orizzontale dà una *linea meridiana*, le cui estremità son dirette verso i punti *settentrione* e *mezzodì* dell' orizzonte. La distanza angolare fra il punto di settentrione e il verticale di un oggetto è l' azimuth di questo oggetto medesimo: nell' emisfero australe è la distanza dal punto di mezzodì.

6° Si determina la posizione di un punto sulla superficie della terra, per mezzo della sua *latitudine* ossia dalla sua distanza dall' equatore; e della sua *longitudine*, ossia dell' angolo che il suo meridiano fa con un altro meridiano, preso per punto di partenza. La latitudine si conta da 0 a 90°; la longitudine da 0 a 180°, verso levante o ponente, o da 0 a 360° andando sempre verso ponente. La longitudine si conta anche per mezzo del tempo, a ragione di 24 ore per 360°, di 15° l'ora, di 15′ di grado per ogni minuto di tempo, ec. Il meridiano che si suol prendere per punto di partenza è o quello dell' isola di Ferro, o quello che passa per l'osservatorio principale di mano in mano di ogni nazione, ma per lo più si suole attenersi a quello di Parigi.

7° La *declinazione* e l' *ascensione retta* sono nella sfera celeste, gli archi che corrispondono respettivamente alla latitudine e alla longitudine terrestre. L' ascensione retta si conta in archi o in tempi partendosi dal punto dell' equatore celeste che corrisponde all' *equinozio di primavera*, sempre verso *levante*.

I piccoli circoli paralleli all' equatore son chiamati *paralleli*, sul globo terrestre, e *circoli di declinazione* sopra la volta celeste.

8° Gli astronomi adoperano le espressioni di *latitudine* e di *longitudine celeste*, per le distanze angolari degli astri dall' ecclittica, e da un gran circolo che passa per i poli dell' ecclittica e per l' equinozio di primavera.

DIVERSE SPECIE DI TEMPI E DI RIVOLUZIONI. Il *tempo siderale* vien misurato dal moto di rotazione diurna apparente di una stella, o piuttosto dall' equinozio di primavera. Tal rotazione essendo perfettamente uniforme, ne resulta che il giorno siderale è un' unità di tempo comodissima per gli astronomi. Questo giorno si divide in 24 ore, divisa poi ciascuna poi in 60 minuti e 3600 secondi. Pendolo siderale è quello che camminando con un moto uniforme, è regolato in modo da segnar sempre 0 or. 0 m. 0 s. quando l' equinozio passa al meridiano.

L' intervallo fra due passaggi consecutivi del Sole al meridiano non è costante come per le stelle. Primieramente è sensibilmente più lungo del giorno siderale: inoltre varia in modo da essere, verso il 21 di dicembre, d' un mezzo minuto più lungo, e verso i 21 di settembre di un mezzo minuto circa più corto della sua propria durata media. Queste variazioni nel cammino diurno apparente del Sole dipendono da due cagioni, cioè l' ineguaglianza reale di celerità nel moto di traslazione della terra sulla sua orbita, e l' obliquità dell' ecclittica sull' equatore. Il giorno vero non è dunque costante, e di qui è venuto che per gli usi civili è

stato adottato il *tempo medio*, nel quale si dà al giorno una durata costante uguale alla durata media del vero giorno solare!

Gli astronomi contano il giorno sia siderale, sia medio da 0 a 24 ore senza interruzione. Il giorno vero comincia dal passaggio del Sole al meridiano.

Il giorno siderale espresso in tempo medio non è che di 23 ore, 56 minuti, 4 secondi, 093; e il giorno solare medio espresso in tempo siderale è di 24 ore, 3 m. 56 s., 555. Le stelle passan dunque al meridiano ogni giorno, 3 m. 55 s., 907 (tempo medio) più presto del giorno avanti.

Per convertire in tempo medio un intervallo espresso in tempo siderale, bisogna sottrarre 9 s., 829 per ogni ora di tempo medio; e all'incontro bisognano 9 s., 856 l'ora, per convertire in tempo siderale un numero espresso in tempo medio.

TAVOLA PER CONVERTIRE IL TEMPO SIDERALE IN TEMPO MEDIO.

		o.	m.			o.	m.			o.	m.
Gennaio	1	0	10	Maggio	6	21	2	Settembre	2	13	15
	6	2	0		11	55	55		8	15	55
	11	4	30		16	50	35		13	15	55
	16	6	10		21	50	5		18	15	13
	21	8	35		26	15	49		23	11	35
	31	9	50		31	19	57		28	11	34
Febbraio	5	8	5	Giugno	5	19	7	Ottobre	5	11	15
	10	6	40		15	18	47		8	10	54
	15	2	59		15	18	57		15	10	35
	20	2	5		25	18	7		19	10	13
	29	1	41		25	17	47		23	6	55
Marzo	2	1	21		30	17	20		28	2	39
Marzo	7	1	1	Luglio	3	17	5	Novembre	3	2	15
	12	0	42		10	16	40		7	2	57
	17	2	23		15	16	23		10	2	57
	21	2	1		20	16	19		17	2	17
	27	20	42		25	15	59		20	7	27
Aprile	1	20	25		30	15	50		27	7	57
Aprile	5	23	5	Agosto	4	13	15	Dicembre	5	7	17
	11	19	44		9	14	21		7	6	58
	16	21	24		14	14	21		10	6	20
	21	22	4		19	14	13		17	5	19
	26	21	45		24	13	21		20	2	20
Maggio	1	21	25		29	13	24		27	2	27
									31	2	17

La tavola di sopra racchiude per differenti giorni dell'anno, i numeri che si debbono aggiungere al tempo siderale, posto al mezzodì medio, per ottenere il tempo medio. Questi numeri acemano di circa 4 minuti per giorno. Non convengono però se non che agli anni di numero pari e non divisibili per 4, come il 1830, 1834 ec. Per gli anni che vengono immediatamente dopo questi ultimi, bisogna diminuire tutti i numeri di un minuto: per quei che vanno avanti, aumentar di altrettanto: finalmente pei *bisestili*, in cui serie è divisibile per 4, si aumentan di 2 minuti i numeri dei due primi mesi, e si diminuiscon di altrettanto tutti i seguenti.

Questa tavola indica per esempio che nell'anno 1834, al mezzodì medio del 12 marzo, il tempo medio era avanzato di 42 minuti sul tempo siderale, e che per conseguenza il tempo siderale ora di 23 ore e 18 m. Il 24 di agosto a mezzodì medio, il tempo siderale era di 10 ore, 9 m.

L'*equazione del tempo* è la differenza che passa fra il tempo medio e il vero.

Diamo qui una tavola ove si trova tal differenza espressa fino a uo decimo di minuto circa, per tutti i giorni dell' anno di 5 in 5. Aocho questa non serve che per gli aooi che cadono ad oguai distaoza da 2 anoi biseatili, o di taie specie sono il 1830 il 1834 ec.: quanto agli altri aooi, l' orroro non è che di un piccol numero di secondi. Si avverta che i oumeri posti nella 3ª e 4ª colonna della tavola devono essere aggiunti a 12 ore oppure aottratti quando aon preceduti dal segno —: il resoltato dell' operazione indica il tempo medio al vero mezzodì del giorno di coi si tratta. Così il 1 di gennaio il tempo medio a mezzogiorno vero è di 12 ore, 3 m. 48 s.: il primo maggio è di 23 ore 56 m. 54 s.: quattro volte l' anno soltanto, il tempo modio e il tempo vero soon uguali e l' equazione del tempo è ouila: io che segue ai 15 aprile, 15 giugno, 1 settembre e 25 dicembre.

TAVOLA PELL' EQUAZIONE DEL TEMPO.

Gennaio	1	3′,8	Maggio	6	— 3 ,6	Settembre	3	— 0 ,7
	6	3 ,1		11	— 3 ,6		8	— 3,3
	11	6 ,2		16	— 3 ,3		13	— 5,6
	16	10 ,6		21	— 3 ,8		18	— 9,0
	22	11 ,6		26	— 3 ,4		23	— 7,0
	31	13 ,7		31	— 3 ,2		28	— 3,3
Febbraio	3	14 ,2	Giugno	5	— 3 ,3	Ottobre	3	— 10,6
	10	14 ,6		10	— 2 ,1		8	— 13,6
	16	14 ,3		13	0 ,0		13	— 15,3
	23	14 ,6		20	3 ,0		18	— 14,7
	28	13 ,1		22	6 ,1		23	— 13,0
Marzo	3	11 ,4		30	8 ,1		28	— 10,1
Marzo	7	11 ,3	Luglio	3	4′,1	Novembre	3	— 10,3
	12	10 ,0		10	4 ,0		7	— 10,2
	17	8 ,6		15	3 ,3		10	— 10,7
	22	7 ,1		20	3 ,2		17	— 14,5
	27	5 ,6		25	3 ,1		22	— 13,7
Aprile	1	4 ,0		30	6 ,1		27	— 13,2
Aprile	2	6 ,3	Agosto	4	3 ,8	Dicembre	2	— 10,4
	11	1 ,1		9	3 ,2		7	— 6,4
	16	— 2 ,3		14	4 ,2		13	— 6,1
	21	— 1 ,2		19	3 ,4		17	— 3,7
	26	— 6 ,3		24	2 ,3		33	— 1,2
Maggio	1	— 3 ,1		29	3 ,2		27	1,2
							31	3,7

Il cammino apparente del Sole nel cielo stellato è percorso da quest' astro in un periodo chiamato *anno siderale*, la cui durata è di 365 g., 6 o., 9 m., 9 a, in tempo solare medio; o di 366 g., 6 o., 9 m., 9 a., in tempo siderale: il che è quanto dire che io capo a quest' iotervallo di tempo, il Sole è tornato nella atessa posizione per riguardo alle stelle.

È stato dato il nomo di *Zodiaco* a una fascia 9° larga sopra o sotto l'appareote atrada del Sole nel Cielo, ed è stata divisa io 12 segni, 30° ciascuno. Non voglai confondere questi segni colle costellazioni che portaoo lo stosso oomo, ma che oggi non occupan più lo stesso sito nel cielo.

I paasaggi appareoti del Sole all' equinozio e il suo soggiorno alteroativo nei doe emisferi boreale o australe, determinaoo le nostre stagioni. In ragione della precessione degli equinozi, l'equinozio retrograda sull' eclittica, o il Sole l' incootra nel suo moto progressivo prima di avor compita la sua rivoluzione siderale. L' iotervallo del tempo compreso fra doe ritorni consecutivi al medesimo equinozio, è quello che si chiama *anno tropico*, ed è di 365 g., 5 o., 48 m., 49

s., 7, ossia più corto dell' anno siderale di 20 m., 19 s., 9.

Il grand'asse dell' ellisse descritta dalla terra ha un movimento diretto di 11″, 8 l'anno. L'intervallo fra due ritorni consecutivi al perielio è dunque più lungo dell' anno siderale, e porta il nome di anno *anomalistico:* è di 365 g., 6 o., 13 m., 49 s., 3.

Quanto agli altri pianeti si distingue pure la rivoluzione siderale dalla tropica, e si dà il nome di rivoluzione *sinodica* all' intervallo del tempo necessario perchè il pianeta torni nella medesima direzione colla terra per rispetto al Sole.

Altri elementi dei pianeti. Il *nodo ascendente* è quello per cui un astro passa nell' andare dal mezzodì al settentrione dell' ecclittica

L'*epoca* è il sito di un pianeta sulla sua orbita per un istante determinato qualunque. Per lo più si sceglie il principio di un anno. Se per esempio, la lon-

TAVOLA DEGLI ELEMEN

	SOLE	MERCURIO	TENERE	TERRA
Diametro, posto quello della terra come 1	100,10	0,34	0,00	1,00
Diametro, quello del sole posto come 1	1,00	0,003	0,000	0,000
Diametro, in 1000 chilometri	1301	4,3	12,1	12,7
Superficie, presa quella della terra come 1	110,30	0,12	0,00	7,00
Superficie, quella del sole essendo 10000	10000	0,1	0,7	0,8
Volume, posto 1 quello della terra	1304100	0,04	0,00	1,00
Volume, quello del sole essendo 1000000	1000000	0,03	0,7	0,7
Schiacciamento	»	»	»	1,300
Massa, quella della terra posta 1	000000	0,10	0,02	1,00
Massa del sole, quella del pianeta essendo 1	1	2040810	405071	000000
Densità, quella della terra essendo 1	0,25	3,61	1,07	1,00
Densità, posta come 1 quella dell' acqua	1,12	17,7	0,0	4,0
Caduta dei corpi sulla superficie nel primo minuto secondo, in metri	130,00	4,03	0,10	4,01
Diametro apparente veduto dalla terra { maximum	02′34″,0	11″0	05″,0	»
Diametro apparente veduto dalla terra { minimum	31′,00″,0	4″0	0″,0	»
Celerità media del moto di traslazione per ogni secondo, in metri	»	48021	38420	00811
Celerità media del moto di rotazione all'equatore, per ogni secondo in metri	»	103,7	484,5	401,0
Spazio angolare percorso sull'orbita attorno al sole in 30 giorni	»	300°	140°,0	00°,2
Caduta verso il sole in un secondo di tempo in millimetri	»	19,0	0,4	2,2
Mezzo grand'asse o distanza media dal sole	»	0,38710	0,72000	1,00000
Distanza dal sole in millioni di chilometri { maximum	»	72	113	707
Distanza dal sole in millioni di chilometri { minimum	»	22	311	152
Distanza dalla terra in millioni di chilom. { maximum	»	221	250	»
Distanza dalla terra in millioni di chilom. { minimum	»	74	37	»
Eccentricità	»	0,2050	0,0080	0,0168
Inclinazion dell'orbita sul piano dell'ecclittica	»	7°,0′00	0°,23′,17	»
Longitudine del perielio nel 1810	»	74°,30′,23	128°44′,30	99°,39′37
Variazione tropica secolare del perielio	»	1°,08230	1°,00217	0°,08560
Longitudine del nodo ascendente nel 1810	»	46°,4,00	74°,07′30	»
Variazione tropica secolare del nodo	»	1°,10	0°,80	»
Durata della rivoluzione siderale in giorni	»	87,0633	224,7008	0052504
Durata della rivoluzione tropica in giorni	»	87,0884	224,0035	000,24003
Durata della sinodica in giorni	»	110,87	003,02	»
Epoca 1810	»	003°,02′,31	230°,16′20	00°28′00
Moto tropico diurno	»	4°,00439	1°,00217	0°,08360
Durata della rotazione sull'asse	22 g., 2	24 o. 0′,3	23 o. 21′,0	03 o. 50′,07

(1) Mancano nella tavola gli elementi dei pianeti e asteroidi di recente scoperta, per non essere stati anc

gitudine di Venere al mezzodì medio di Vienna, il 1 gennaio 1836, era di 332,2 questo numero è l'epoca di Venere per l'anno 1836.

La parola *afelio* indica, oppostamente a *perielio*, il punto in cui un pianeta si allontana il più possibile dal Sole nel percorrere la sua orbita. Ambedue i punti son compresi nella denominazione *di opsidi*.

I termini *apogeo* e *perigeo* indicano parimente la maggiore e la minor distanza della luna dalla terra.

Si fa distinzione di alcuni elementi *eliocentrici* da altri *geocentrici*: i primi hanno per centro il Sole, i secondi la terra.

Queste definizioni e le altre precedenti son più che bastevoli a comprender le tavole ove abbiamo riunito una quantità di elementi sparsi, il cui valore numerico abbiamo desunto dall'opera tedesca del Littrow, la quale porta per titolo: *Die Wunder des Himmels* (le Maraviglie del cielo).

I PIANETI (1).

MARZE	VESTA	GIUNONE	CERERE	PALLADE	GIOVE	SATURNO	URANO
2,20	0,08	0,18	0,20	0,28	11,00	0,70	4,28
0,003	0,003	0,001	0,002	0,002	0,100	0,001	0,040
7,1	0,4	0,3	1,0	3,3	140	124	88,0
0,02	0,001	0,00	0,04	0,07	121,12	90,17	17,02
0,3	0,001	0,03	0,08	0,08	100	70	15
0,18	0,00004	0,000	0,008	0,077	1330	820	70
0,72	•	•	•	•	1100	600	00
•	•	•	•	•	1113	2111	•
0,12	•	•	•	•	640	00	17
1340320	•	•	•	•	1004	0012	01000
2,70	•	•	•	•	0,20	0,20	0,20
2,0	•	•	•	•	1,1	0,5	1,0
103	•	•	•	•	12,80	4,01	4,74
27″,0	0″,0	2″,3	2″,3	4″,1	40″,2	21″,3	4″,3
2″,7	0″,2	0″,7	0″,3	1″,0	28″,0	15″,3	3″,2
04001	00043	18054	18024	18010	18010	0276	7083
152,0	•	•	•	•	12081,0	10882,1	7088,8
46°,1	02°,8	19°,0	18°,0	18°,8	7°,2	2°, 0	1°, 0
1,1	0,43	0,40	0,43	0,45	0,11	0,028	0,097
1,52000	0,2202	2,0704	2,7072	2,7603	0,20128	0,03731	10,18218
208	008	318	402	033	840	1058	8108
224	008	000	324	828	780	1092	2820
400	008	832	080	007	968	1030	3141
32	210	142	230	138	088	1103	0870
0,0082	0,1820	0,2344	0,0730	0,2443	0,0483	0,0502	0,0497
1° 21′,08	7° 7′,78	10° 4′,43	10° 07′,30	34° 07′,47	1° 18′,82	2° 20′,03	0° 46′,43
171° 03′,80	000° 19′,00	83° 18′,0	140° 44′,0	121° 22′,0	11° 17′,30	00° 13′,18	187° 20′,01
0°, 02407	0°,27120	0°, 22201	0°,21414	0° 21400	0°, 08313	0°, 08880	0°, 01177
44° 0′,8	203° 10′,2	171° 9′,83	80° 06′,82	170° 32′,0	98° 00′,07	112° 0′,02	78° 03′,30
0°, 70	1°, 30	1°, 30	1°, 08	1°, 30	0°, 80	0°, 71	0°, 80
1,0796	1027,7	1000,8	1081,4	1082,3	4032,0980	10758,9698	30082,7121
1,0097	1327,4	1098,0	1081,1	1082,2	4030,6100	10740,7324	30080,3378
779,00	005,0	474,0	400,0	400,0	328,3	372,0	300,7
146° 28′,58	103° 44′,88	95° 01′,80	81° 12′,33	40° 0′,38	25° 24′,08	244° 37′,58	110° 27′,88
0°, 42407	0°, 07100	0°, 22001	0,21414	0°, 21400	0°, 08813	0°, 03880	0°, 01177
14 0. 29′,3	•	•	•	•	0 0. 58′,7	18 0. 10′,0	•

...intamente redatti.

TAVOLA DEGLI ELEMENTI DEI SATELLITI DI GIOVE.

Ordine dei satelliti partendosi dal pianeta	I	II	III	IV
	g. o. m.	g. o. m.	g. o. m.	g. o. m.
Durata delle rivoluzioni tropiche	1 18 27,03	2 13 13,72	7 3 42,32	16 16 22,15
Distanza media dal centro di Giove: in raggi dell'orbita terrestre	3,02223	2,00412	0,20224	2,0112
Distanza media dal centro di Giove: in raggi di Giove	2,328	2,222	24,402	25,433
Inclinazione dell'orbita su quella di Giove	3°,18′	2°,43′	3°,22	3°,32′
Longitudine del nodo ascendente sull'ecclittica	314°,40′	313°,42′	314°,24′	312°,32
Vero diametro in chilometri	4148	3408	2032	4123
Diametro apparente: dal centro di Giove	23′,20′	17′,12′	12′,0″	1′,32″
Diametro apparente: medio veduto dalla terra	1″,4	1″,1	2″,2	1″,4
Massa, posta come 1 quella di Giove	0,02232	0,00222	0,02033	0,03034
Densità, idem	2,7	1,7	1,2	1,7
Caduta dei corpi sulla superficie nel primo secondo in metri	0,22	0,20	0,23	0,22
Caduta verso Giove in un secondo in metri	2,04	1,43	0,22	3,12
Cammino percorso in un'ora sull'orbita, in chilometri	32120	31222	42742	31112

TAVOLA DEGLI ELEMENTI DEI SATELLITI DI SATURNO.

Ordine dei satelliti	I	II	III	IV	V	VI	VII
	g. o. m.	g. o. m.	g. o. m.	g. o. m.	g. o. m.	g. o. m.	g. o. m.
Durata della rivoluzione tropica	0 20 37,5	1 8 53,1	1 21 18,4	2 17 44,8	4 12 25,2	10 22 41,2	79 7 23,7
Distanza media dal centro di Saturno: in raggi dell'orbita terrestre	3,32232	3,02173	2,22221	2,32233	3,30321	1,30332	0,22413
Distanza media dal centro di Saturno: in raggi di Saturno	2,185	4,228	4,833	6,222	8,223	20,202	28,252
Inclinazione dell'orbita su quella di Saturno	28°24′	28°34′	28°,34′	28°,34′	28°,24′	28°,34′	22°,42′
Diametro in chilometri	—	—	773	772	1232	2237	2874

TAVOLA DEGLI ELEMENTI DEI SATELLITI DI URANO.

Ordine dei satelliti. . .	I	II	III	IV	V	VI
Durata della rivoluzione tropica	g. o. m. 2 21 25	g. o. m. 3 17 1	g. o. m. 10 23 4	g. o. m. 13 11 5	g. o. m. 38 1 49	g. o. m. 107 16 46
Distanza media dal centro di Urano — in raggi dell'orbita terrestre . .	0,00227	0,00308	0,00358	0,00411	0,00888	1,01093
Distanza media dal centro di Urano — in raggi di Urano . .	13,131	17,039	19,981	22,776	45,538	83,048

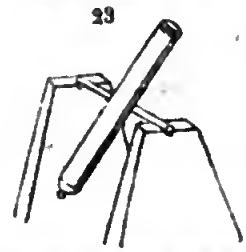
TAVOLA DEGLI ELEMENTI DELLA LUNA.

Rivoluzione siderale	g. 27, o. 7, m. 43, 198
— tropica.	27, 7, 43, 978
— sinodica	28, 12, 44, 047
Inclinazione dell'orbita sul piano dell'ecclittica	5°, 8′,78
Parallasse orizzontale media all'equatore	0°, 57′,01
Rivoluzione siderale dei nodi	g. 3798, o. 3 m. 31,85
— tropica dei nodi	3798, 4 14,93
Diametro medio apparente — veduto dalla terra	0° 31′8″,0
Diametro medio apparente — veduto dal sole	0° 0′9″,3
Rivoluzione siderale degli apsidi	g. 3232, o. 18 m. 37,28
— tropica degli apsidi	3231, 11 4,13
Diametro medio apparente della terra veduto dalla Luna.	1° 34′, 88
Eccentricità dell'orbita in porzioni del semigrand'asse	0,0388
— in chilometri	30,803
— in raggi terrestri.	4,791
Distanza media dal centro della terra in raggi terrestri.	38,298
— in chilometri	293,838
— in raggi dell'orbita terrestre.	0,00881
Rapporto della Luna alla terra — In diametri	3 : 11
Rapporto della Luna alla terra — In superfice	1 : 14
Rapporto della Luna alla terra — In volume.	1 : 30
Rapporto della Luna alla terra — In massa	1 : 79
Rapporto della Luna alla terra — In densità.	2 : 3
Caduta dei corpi sulla superficie della Luna nel primo secondo	0m, 863

Strumenti e osservazioni. In astronomia la misura del tempo è della massima importanza: ad ottenerla gli astronomi si servono di pendoli od orologi costruiti con una perfezione particolare, chiamati *cronometri*.

Il *canocchiale meridiano o strumento dei passaggi*, rappresentato nella appresso figura, serve a costatare l'intervallo di tempo segnato da un cronometro, fra due ritorni consecutivi delle medesime stelle al meridiano, e per conseguenza a conoscere l'andamento o moto del cronometro per rapporto al tempo siderale o tempo medio. Questo canocchiale è

23



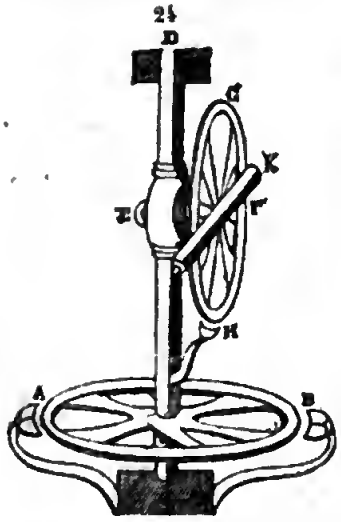
mobile intorno ad un asse perfettamente

orizzontale o perpendicolare al piano del meridiano: non si può duoque movere che nella direzione del meridiano, e serve a notare l'istante preciso in cui gli astri giungono al punto culminante del loro circolo diurno, e conseguentemente le loro ascensioni rette.

Un semplice canocchiale murale, cioè a dire fissato ad un muro può servire a costatare l'intervallo di tempo scorso fra i passaggi consecutivi di una medesima stella in un circolo verticale al sito dell'osservazione, e a conoscere per conseguenza il moto e l'andamento di un cronometro.

La figura che segue rappresenta il *circolo azimuttale* uno degli strumenti più adoperati in astronomia. Il canocchiale K è congegnato col cerchio verticale GFH mobile sul suo asse EF, e che può aggirarsi in tutti gli azimut attorno all'asse verticale CD. Un nonio situato in H serve a leggere le altezze osservate sopra l'orizzonte. Un circolo orizzontale fissato invariabilmente sull'asse CD, dà il valore dell'azimut nel quale è stata fatta l'osservazione; la lettura si fa su questo circolo mediante il nonio B.

24



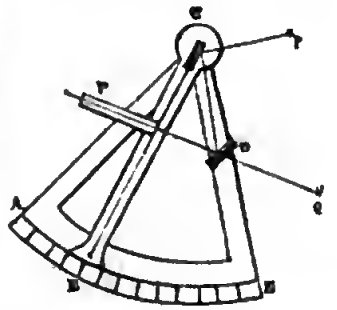
Se l'asse CD è posto parallelamente all'asse del mondo, lo strumento prende il nome di *equatoriale*, ed allora può servire ad osservare direttamente le ascensioni rette e le declinazioni.

Il *settore zenittale* e il *teodolito* sono modificazioni del cerchio azimuttale. Il primo, destinato a delle osservazioni esattissime di quelle stelle che si trovano in vicinanza dello zenith, ha un raggio di una gran lunghezza e un *limbo* con un piccol numero di gradi. Il secondo è specialmente destinato alla misure angolari sulla superficie della terra.

Il circolo murale che non può aggirarsi che nel piano del meridiano, serve ad osservare le più grandi altezze degli astri e conseguentemente le loro declinazioni.

In mare, ove gli osservatori non possono contare sopra un appoggio fermo, si fa uso degli *strumenti a reflessione*, che hanno la proprietà di far conoscere con una sola osservazione, la distanza angolare di due oggetti. La figura qui appresso rappresenta un sestante. F è un cannocchiale fissato invariabilmente sul lato CA. Il lato mobile CE porta uno specchio perpendicolare al suo piano. Il lato fisso CB porta esso pure uno specchio D perpendicolare al piano dello strumento, e la cui parte superiore è un semplice cristallo che lascia passare i raggi luminosi. Quando il lato CE è su CA e il nonio E è allo zero sul limbo AB, lo specchio in C è parallelo allo specchio in D. Volendo osservare l'angolo di due oggetti P e Q, si faccia girare il lato mobile CE fino a che l'occhio applicato al canocchiale F veda in una sola volta per via di una doppia riflessione, l'oggetto P la cui imagine è riflessa sopra i due specchi, e l'oggetto Q che manda direttamente i suoi raggi al canocchiale. Allora l'angolo AE è precisamente la metà dell'angolo formato dai raggi P e Q, talchè se il limbo è graduato in mezzi gradi numerati come i gradi, leggendovi sopra si troverà immediatamente l'angolo.

25



In tutti questi strumenti, l'asse del cannocchiale è determinato mediante fili incrociati disposti convenientemente nell'interno del tubo.

Nei circoli completi, si adopera quel sì semplice e sì utile principio della ripetizione degli angoli. Il *circolo ripetitore* a reflessione, di cui siamo debitori al Borda, è uno degli strumenti più utili ai navigatori.

PROBLEMI URANOGRAFICI. La trigonometria sferica serve a risolvere la maggior parte delle questioni che possano venire in mente circa le posizioni vere o apparenti dei corpi celesti, supponendo però che si conoscano le leggi del loro movimenti reali.

Per esempio: conosciuta l'ascensione retta e la declinazione di un astro, dedurne la sua longitudine e latitudine celeste.

Qui non si tratta di altro che di risolvere un triangolo sferico di cui si conosce un lato, che è la distanza dei poli dall'ecclittica e dall'equatore, uguale all'obliquità dell'ecclittica: un altro lato che è la distanza polare ossia il complemento della declinazione: l'angolo compresovi uguale all'ascensione retta aumentata di 90°. Il terzo lato di questo triangolo è il complemento della latitudine che si cerca, e la latitudine richiesta è il complemento dell'angolo sferico opposto alla distanza polare.

Questo esempio basterà per indicare il modo di risolvere le questioni analoghe di uranografia che dipendono dalla trigonometria sferica. Le più di tali questioni non implicano grandi difficoltà, purchè si abbia cura di osservare questa regola pratica: *considerare i poli dei grandi circoli a cui si riportano siffatte questioni, piuttosto che i circoli stessi*.

La determinazione della latitudine di un dato luogo mediante l'osservazione dell'altezza meridiana del Sole, richiede un calcolo semplicissimo, unitamente alla notizia della declinazione del Sole al momento della osservazione. Questa declinazione trovasi notata nella tavola delle situazione del Sole in tutti i giorni dell'anno. Il segno — indica la declinazione australe. La latitudine del dato luogo è uguale al complemento dell'altezza meridiana del centro del Sole aumentato della declinazione presa col suo segno. Per aver l'altezza del centro si prende la metà della somma delle altezze dei lembi superiore e inferiore del Sole. Quando si voglia fare anche più esatta l'operazione, bisogna guardare il barometro e il termometro al momento dell'osservazione, e tener conto dell'effetto della refrazione diminuito di quello della parallasse. Questa tavola che abbiamo tolta dall'opera del Littrow si riferisce al mezzodì di Vienna: dovendo servire per qualunque altro luogo, sarà facile modificarla, postochè si conosca la posizione di esso per rapporto a questa città.

È da avvertire che questa tavola non si applica che agli anni come il 1827, 1831 ec. che precedono immediatamente i bisestili. Per gli anni come il 1830, 1834 ec. bisogna crescere tutti i numeri della tavola di 0°, 3: quanto agli anni che seguono immediatamente i bisestili, come il 1829, 1837 ec., bisogna diminuire di 0° 3 i numeri dei primi due mesi e aumentare di 0° 8, quei dei successivi. Finalmente nell'ultima colonna invece delle correzioni 0°, 3, 0°, 5, 0°, 8, bisogna sostituire nel medesimo ordine 1 m., 2 m., 3 m.

GNOMONICA. Così è detta l'arte di tracciare sur una superficie qualunque i quadranti solari, comunemente chiamati meridiane.

Lo *stilo* destinato a proiettar l'ombra debb'esser parallelo all'asse terrestre o conseguentemente è situato nel meridiano del dato luogo, e fa coll'orizzonte un angolo uguale alla latitudine. Data una volta questa posizione allo stilo, il problema si riduce a cercare le intersezioni di 24 piani che passan per quest'asse, ugualmente fra loro inclinati sopra la superficie dove si vuol disegnare la meridiana. Ma questo è ufficio della geometria descrittiva, e però qui non daremo altro che il disegno del quadrante orizzontale, uno dei più usitati e al tempo stesso dei più semplici.

Si comincia dal segnare una meridiana: a tal oggetto si fissa un piccolo stilo verticale sur un piano orizzontale: si descriveranno sopra di esso dei circoli di differente raggio prendendo per centro il piede di questo piccolo stilo, di poi sopra ciascuno di questi archi si segneranno i due punti, ove l'ombra dell'estremi-

TAVOLA DELLA SITUAZIONE DEL SOLE PER TUTTI I GIORNI DELL'ANNO.

Giorno		Longitudine	Declinazione	Ascensione retta	
				in arco	in tempo
					h. m.
Gennaio	1	280°,5	— 23°,1	281°,8	18 47
	11	292 ,0	— 21 ,0	293 ,2	19 33
	21	302 ,7	— 19 ,0	303 ,0	20 12
	31	310 ,0	— 17 ,5	313 ,2	20 52
Febbraio	10	320 ,0	— 14 ,2	322 ,4	21 29
	20	331 ,2	— 11 ,1	332 ,1	22 12
Marzo	2	341 ,1	— 7 ,5	342 ,0	22 48
	12	351 ,0	— 3 ,2	351 ,0	23 27
	22	1 ,0	0 ,6	1 ,0	0 4
Aprile	3	10 ,0	4 ,3	12 ,2	0 49
	11	20 ,7	8 ,1	18 ,2	1 10
	21	30 ,5	11 ,7	28 ,4	1 54
Maggio	1	41 ,3	14 ,3	37 ,8	2 31
	11	51 ,8	17 ,7	47 ,4	3 13
	21	60 ,2	20 ,1	57 ,2	3 49
	31	69 ,1	21 ,6	67 ,4	4 30
Giugno	10	78 ,7	22 ,0	77 ,7	5 11
	20	88 ,2	23 ,4	87 ,1	5 51
	30	97 ,7	23 ,2	96 ,2	6 24
Luglio	10	107 ,0	22 ,2	105 ,2	7 13
	20	115 ,3	20 ,8	114 ,0	7 52
	30	122 ,3	18 ,7	120 ,8	8 33
Agosto	9	129 ,0	16 ,0	127 ,2	8 14
	20	135 ,3	12 ,0	137 ,2	9 31
	30	152 ,0	8 ,3	137 ,1	10 22
Settembre	6	124 ,2	2 ,2	103 ,1	11 2
	16	174 ,0	0 ,1	172 ,1	11 41
	26	184 ,5	— 4 ,3	184 ,1	12 17
Ottobre	6	194 ,5	— 8 ,7	132 ,0	12 53
	16	204 ,0	— 9 ,5	202 ,2	13 30
	26	214 ,0	— 13 ,0	212 ,0	14 8
Novembre	7	224 ,2	— 17 ,1	221 ,0	14 47
	17	234 ,5	— 18 ,3	231 ,0	15 28
	27	244 ,4	— 21 ,0	241 ,2	15 10
Dicembre	7	254 ,3	— 21 ,0	252 ,2	15 52
	17	264 ,7	— 22 ,4	263 ,2	17 27
	27	274 ,3	— 22 ,0	273 ,4	18 12

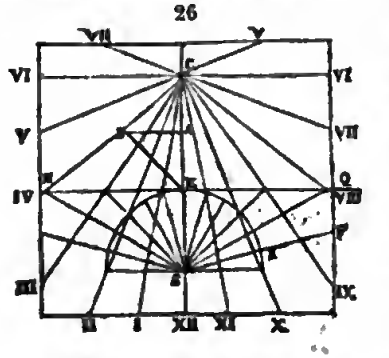
tà dello stile al sarà atesa avanti e dopo il mezzodì, nei tempi prossimi ai solstizi. La linea retta che passa pel piede dello stile e per la posizione media fra i mezzi di tutti questi archi, è la meridiana ricercata.

Ciò posto sia CS′ la meridiana, CS la proiezione dello stile sul piano orizzontale, dimodochè l'angolo SCA sia uguale alla latitudine, SE perpendicolare a CS, NQ perpendicolare a CS′, ES′ uguale a ES.

Si divide in 12 parti uguali il semicircolo che ha per centro S′ e per raggio S′E′: per i punti di divisione si conducono delle secanti che si prolungano fino alla tangente NQ: le linee orarie CI, CII, CIII ec. si partono tutte dal punto C e vanno a finire e passano per i punti ove le secanti metton capo a questa tangente.

E così quando lo stile CS sarà raddrizzato sul piano meridiano, la sua ombra, alle cinque di sera, sarà sulla linea segnata CV a manca della figura, e alle cinque di mattina sarà sul prolungamento della medesima linea a dritta della figura.

26



§ 5. *Notizie storiche e bibliografiche*.

Più di 2000 anni prima dell'era nostra, l'astronomia era coltivata nella China come base delle ceremonie religiose.

Si dice che i Caldei possedessero delle osservazioni astronomiche che risalivano a 19 secoli avanti Alessandro, e che Aristotele, se si dee credere a Simplicio, volle conoscere per mezzo di Callistene. Il periodo di 223 mesi lunari che chiamavano *Saros*, non è stato da loro scoperto se non dopo lunga serie di osservazioni.

La divisione del cielo in costellazioni risale verso il secolo decimoquarto avanti l'era cristiana. L'epoca però in cui si diedero i nomi alle costellazioni dei segni dello zodiaco si ignora: questi nomi sono racchiusi in questi due versi latini:

Sunt Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo,
Libraque, Scorpius, Arcitenens, Caper, Amphora, Pisces;

e in nostra lingua:

Ariete, Toro, Gemelli, Cancro, Leone, Vergine
Libra, Scorpione, Sagittario, Capricorno, Aquario, Pesci:

tutte denominazioni che sembrano aver relazione, le une coi movimenti del Sole, le altre coll'agricoltura, o col clima di quel popolo presso il quale lo zodiaco ha avuto origine.

L'Egitto e l'India hanno avuto conoscenze bene inoltrate in astronomia, ma l'origine di esse si ignora.

Talete nato a Mileto 640 avanti G. C., fu il primo dei Greci a predire e spiegare le eccliasi del Sole e della Luna. Aveva egli attinto parte del suo sapere dai sacerdoti egiziani.

Pitagora nato a Samo verso il 590 prima di G. C. fu dapprima discepolo di Talete; dopo visitò l'Egitto e l'India, e fondò una celebre scuola in cui insegnò il duplice moto della terra: Filolao suo discepolo prese poi ad esporlo pubblicamente. I Pittagorici conobbero il vero sistema del mondo, il moto delle comete attorno al sole ec. ec.

Metone ed Euctemone osservarono il solstizio di state l'anno 432 avanti G. C. Questa osservazione, quella che in seguito fece Pitea di Marsilia con uno gnomone circa il tempo di Alessandro, e quelle di Tcheon-Kong nella China 1100 anni avanti l'era nostra (esse pure fatte mediante uno gnomone), provano lo scemamento dell'obliquità dell'ecclittica.

Più celebre è la scuola di Alessandria pei suoi astronomi, quali sono Aristillo e Timocari, vissuti 300 anni avanti G. C. Aristarco di Samo che con un ingegnoso metodo ma inesatto e pratico soltanto, tentò di determinare il rapporto delle distanze del Sole e della Luna: Eratostene che si provò a misurar la terra: Ipparco del II° secolo avanti G. C. astronomo il più valente fra tutti gli antichi, a cui dobbiamo la scoperta della precessione degli equinozi, una parte delle ineguaglianze dei moti apparenti del Sole e della Luna: Sosigene, fatto appositamente da Giulio Cesare venire d'Alessandria per riformare il calendario romano: e finalmente verso l'anno 130 della nostra era, Tolomeo, il quale nella sua grand'opera denominata *Almagesto* tentò di dare un sistema completo di astronomia. A parer suo la Terra è immobile nel centro dell'universo e intorno ad essa in orbite circolari girano ogni giorno di oriente in occidente la Luna, Mercurio, Venere, il Sole, Marte, Giove, Saturno, il cielo stellato ch'ei suppone di materia solida e cristallina e ove le stelle sono fisse. Ma perchè i pianeti sunnominati vedonsi corrispondere ora ad una costellazione e ora ad un'altra, perciò oltre al moto diurno di oriente in occidente comune ai medesimi colle stelle, fissò loro un moto annuo d'occidente in oriente per cui intorno alla terra essi compiano in diversi

tempi le loro rivoluzioni secondo la lor diverse distanze. Questo sistema ha durato 14 secoli ad esser seguito: oggi l'Almagesto dee riguardarsi come un prezioso deposito delle conoscenze astronomiche degli antichi.

La scuola di Alessandria sussistè per altri 5 secoli dopo Tolomeo, ma senza fare alcun ulteriore progresso nella scienza.

Gli Arabi coltivarono con felice successo l'astronomia. Recentemente il Sedillot ha provato che fin dall'anno 971 Aboul-Wefa aveva costatato a Bagdad l'ineguaglianza lunare nota sotto il nome di *variazione* e la cui scoperta generalmente si dà a Ticone Brahe.

Messicani e Peruviani osservarono con cura le ombre delle gnomone ai solstizi e agli equinozi. I primi conoscevan l'senotropico più esattamente d'Ipparco, e vi ha luogo a credere che questa determinazione l'abbian tratta dall'antico continente.

Da Copernico esce a Thorn in Polonia ai 19 febbraio 1473, comincia la rigenerazione astronomica e l'esposizione del vero sistema del mondo esposto nel bel libro *De revolutionibus orbium cœlestium*. Ei non visse tanto da vedere il buon successo della sua opera e morì quasi repentinamente in età di 71 anno, dopo averne ricevuta la prima copia.

Galileo Galilei nato a Pisa nel 1564 e morto presso Firenze nel 1642, è una delle glorie più grandi d'Italia. Sostenne egli e dimostrò il sistema di Copernico. Dietro un puro racconto fattogli della recente invenzione di un semplice cannocchiale, uno ne costruisse e con esso scoperse la fasce di Giove, le fasi di Venere, le macchie del Sole ec. Le persecuzioni che dovette soffrire per parte dell'Inquisizione, che allora riteneva come poco consonante colla rivelazione il sistema del moto della terra, amareggiarono gli ultimi anni di questo grand'uomo.

Ticone Brahe norvegio, morto a Praga nel 1601, fu uno dei più grandi osservatori dei tempi moderni. Fu meno felice nell'immaginare il sistema del mondo ove volle accordare le idee di Tolomeo con quelle di Copernico.

Il Keplero sì giustamente rinomato per la scoperta delle leggi che portano il suo nome, nacque il 1571 nel ducato di Wurtemberg. Visse e morì nella miseria, superiore al suo secolo, e poco compreso dai suoi contemporanei. Sue sono queste sublimi parole: *Pubblico il mio libro: la legga l'età presente*, e *la posterità, poco mi preme: egli aspetterà chi la legga: anche Dio ha aspettato per sei mil'anni che venisse un contemplatore delle sue opere*.

L'Huygens seguì dappresso Keplero e Galileo: scoperse, e a meglio dire spiegò, le apparenze dell'anello di Saturno e uno dei Satelliti di questo pianeta.

Newton colla sua scoperta della gravitazione universale, pubblicata nel 1689 nel suo *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, somministrò il germe dei metodi i più perfetti dell'astronomia moderna.

L'antica Accademia delle scienze di Parigi, in cui si distinguono i nomi del Picard, Auzout, Cassini, Lacaille, Lemonnier, Bouguer, La Condamine, Clairaut, D'Alembert, Lalande, Borda, Lagrange, Lapisce, è assai benemerita dell'astronomia. In Inghilterra il Flamsted, Halley, Bradley, Guglielmo Herschel; in Alemagna Mayer, ai sono illustrati per le fatte scoperte. In Italia oltre i nominati, ebbero nome di valenti in questa scienza Cassini, Cavalieri, Orianì, Piazzi.

Senza rammentare i lavori più recenti citeremo fra gli scritti in materia di astronomia, le opere elementari del Biot, Delambre, Francœur, Herschell, Littrow, Arago (*Annuario delle Longitudini*, *Lezioni di Astronomia*), Laplace, (*Esposizione del sistema del mondo*, e *Meccanica celeste*). Lalande (*Bibliografia astronomica*). Pei lavori più recenti si consulti la *Corrispondenza* del De Zach, e le *Notizie astronomiche*, pubblicate sotto la direzione dell'abile astronomo Schumacher a Altona.

INDICE ANALITICO

DELLE MATERIE CONTENUTE

IN QUESTO PRIMO VOLUME

NB. *Il numero arabo indica la pagina, il romano la colonna.*

I. ARITMETICA

Prospetto dell'ordine con cui qui si tratta, 1, I e II — Preliminari, 1, II — Idea del numero, ivi.

§ 1. Diversi sistemi di numerazione — ordinaria, 2, I — duodecimale, opinione del Fourier, 6, II — Sistema binario; Leibnitz spiega con esso il sistema cinese, 7, I, II — Tavola delle 64 figure cinesi, 8. — Sistema positivo — varii negativi, 9, I II.

§ 2. Le quattro regole fondamentali dell'aritmetica, Addizione, 10, I; Sottrazione, ivi I II; Moltiplicazione; Tavola di Pitagora, 11; Divisione, 12, I, II.

§ 3. Frazioni ordinarie e divisibilità dei numeri — Origine e proprietà fondamentale delle frazioni, 12, II — Numeri primi, loro Tavola, 13 a 15 — Massimo comune divisore, 15, I, II — Divisibilità dei numeri, 16, I, II — Tavola dei più piccoli loro divisori, 17, 18 — Applicazione delle 4 regole alle frazioni, 18, I, II.

§ 4. Frazioni decimali — Notazione e regole fondamentali, 18, II — Riduzione delle frazioni ordinarie in decimali, 20, I — Conversione delle decimali in ordinarie, ivi II; Tavola per le due operazioni sopraddette, 21 a 22.

§ 5. Numeri complessi, addizione, sottrazione, moltiplicazione, 22, II; divisione, 23, I, II.

§ 6. Prove delle operazioni sopranotate, 24, I.

§ 7. Innalzamento di un numero a potenza ed estrazione della radice, 25, I; Tavola delle prime 9 potenze dei primi dieci numeri, ivi, II — Estrazione della radice quadrata, 27, I, II; e della cubica 29 a 32; Tavola ad esse relativa, 33.

§ 8. Rapporti, proporzioni e progressioni — Rapporti per differenza e per quoziente, 33, II. — Proprietà comparata delle equidifferenze e degli equiquozienti, 34, I, II; esclusive degli equozienti, 35. — Progressioni per differenza e per quoziente, ivi I, II. — Resultati singolari provenienti dalle progressioni, 34 e 36.

§ 9. Logaritmi, loro utilità, origine e proprietà, 36, I, II — Tavole dei logaritmi, ivi II; uso delle tavole logaritmiche, 38, I — Calcolo delle quantità negative, ivi, II — Uso delle Tavole di Lalande, 41, I II — Modello di esse, 42. — Tavola di Prony, 43, — di Callet e suo uso, ivi, II; — di Hoëne Vronski, 49; Tavola dei logaritmi dei numeri primi fino a 1979, 33; Uso delle Tavole dei logaritmi dei numeri primi, 42, I.

§ 10. Fatti diversi relativi all'aritmetica — Soluzione dei problemi, 49, I. — Particolari storici, 49, II — Bibliografia di questa scienza, 51, II.

II. ALGEBRA

§ 1. Notazioni e natura delle operazioni dell'algebra; definizione, segni, esempio di problema e sua soluzione, 00 a 00.

§ 2. Le quattro regole e modo di operare nelle quantità algebriche — Addizione, sottrazione 00, 11, moltiplicazione, divisione, 04, 1.

§ 3. Risoluzione dell'equazioni di primo grado — Nozioni sulle equazioni in generale, 00, 1.

§ 4. Risoluzione dell'equazioni di primo grado ad una sola incognita, di primo grado a più incognite 00, 11.

§ 5. Equazioni di secondo grado; risoluzione dell'equazione a due termini, 07, 11; e della completa, 00, 1 — Radice quadrata delle quantità algebriche, ivi. — Equazioni di secondo grado a più incognite, 09, 11.

§ 6. Diverse applicazioni delle notazioni algebriche — Frazioni continue, 00, 11; di Lambert, ivi. 11 — Progressioni per differenza e per quoziente, 61, 1. Esponenziali e logaritmi, 61, 11 — Numeri poligoni 02, 1; figurati, 00, 1. Triangolo aritmetico di Pascal — Binomio di Newton; 03, 11 — Delle combinazioni, 04, 1; esempi in alcuni versi latini, 00, 1 11; di figure, ivi.

§ 7. Proprietà generali dei numeri — Numeri primi, 00, 11; perfetti 00, 1; amici, ivi, 11. — Triangoli rettangoli in numeri, 09, 1 — Fatti singolari relativi alle potenze dei numeri, ivi, 11 — Numeri congrui, 70, 1 — Teorema di Fermat e di Wilson, ivi, 11.

§ 8. Analisi indeterminata del primo grado, ivi.

§ 9. Potenze e radici delle quantità algebriche e numeriche, 71 a 70.

§ 10. Massimo comune divisore delle quantità algebriche, 73, 1.

§ 11. Funzioni dirette, 70.

§ 12. Funzioni simmetriche e simili, 70, 1.

§ 13. Proprietà dell'equazioni di qualunque grado — Radici dell'equazioni, 70, 1, 11 — Decomposizione dell'equazioni in fattori, ivi, 11 — Regole dei segni di Descartes, 79, 1. — Somma delle potenze simili delle radici di una equazione, ivi, 11 — Teorema di Sturm, ivi.

§ 14. Eliminazione; suo metodo per mezzo delle funzioni simmetriche, 00, 11.

§ 15. Trasformazione delle equazioni; risolvente — Trasformazione delle radici dell'equazioni, 01, 1.

§ 16. Fatti diversi relativi all'algebra — Soluzione dei problemi, 05, 1 — Particolari istorici, ivi, 11 — Indicazioni bibliografiche, 07, 11.

III. GEOMETRIA

§ 1. Principii; Definizioni, 00, 1; angoli, ivi, 11; triangoli e poligoni, 00, 11 — Tavola delle corde per un raggio eguale a 10000, 02.

§ 2. Circolo e suoi rapporti di posizione con diverse rette, 00, 1.

§ 3. Superficie delle figure piane, 04, 11 — Tavola per ridurre la divisione del circolo da 00 in 100 parti, 05.

§ 4. Linee proporzionali, figure simili e rapporti delle figure, 00, 11 — Similitudine delle figure 07, 11, loro rapporti, 00, 11.

§ 5. Alcuni gruppi di proposizioni connesse colla geometria elementare, 100, 1; delle trasversali, e delle armoniche, ivi.

§ 6. Soluzione di problemi; quadratura approssimativa del circolo, 104, 1, poligoni stellati, ivi, 11.

§ 7. Geometria pratica; scale, 100, 1; compasso di riduzione 100, 1; Tavola per adoperarlo ivi — Pantografo; compasso di proporzione, istrumenti topografici, traguardi, binda, squadro da agrimensori, bussola, tavoletta, e orientazione della medesima 107 a 111.

§ 8. Linee e piani considerati nello spazio, 111, 11.

§ 9. Solidi terminati da facce piane o curve; Poliedri, 110, 11 — I tre corpi rotondi, 114, 11, sfera, ivi; cilindro, cono, 110, 1, 11.

§ 10. Misura della superficie e dei volumi dei corpi 116, II.
§ 11. Proprietà delle figure alla superficie della sfera, 117, I, II.
§ 12. Similitudine e relazioni delle figure nello spazio, 118, II.
§ 13. Sezioni coniche, ellisse, 119, I; iperbole, 160, II; parabola 166, II — Proprietà comuni alle sezioni coniche, 125, II.
§ 14. Principali superficie delle curve, 164, II.
§ 15. Elementi di geometria descrittiva; metodo delle proiezioni, 166, II. — Questioni sulla linea retta e sul piano, 126, II — Problemi sugli angoli triedri, 160, I — Piani tangenti alle superficie, 166, II. Intersezioni delle superfice, ivi, II — Principii di Prospettiva, 164, I.
§ 16. Trigonometria rettilinea e sferica — Principii fondamentali, 161, I — Tavola dei logaritmi dei numeri di 1 in 1 unità da 1 a 100; 100 a 141. — Tavole trigonometriche di 10 in 10, per gli angoli di 0, a 180, 140 a 140; uso di esse, 140, I; esempi, ivi, II.
§ 17. Geometria analitica, principii fondamentali, 160, II — Costruzioni delle espressioni algebriche, 160, I; espressioni algebriche di alcuni resultati di geometria, 100, I, II — Coordinati rettangolari, 104 a 106 — Equazioni del primo e secondo grado fra le coordinate rettilinee, 106, I — Dei punti, delle linee e delle superficie nello spazio, 150, I — Superfici del secondo grado, ivi, II.
§ 18. Storia di questa scienza, 150 I; Bibliografia di esso, 166, I.

IV. CALCOLO INFINITESIMALE

§ 1. Principii generali del calcolo differenziale, origine di esso, 161, I — Definizioni e notazioni fondamentali, 100, I — Differenziazione delle funzioni semplici, 100, I; delle composte, ivi, II; delle implicite, 104, II — Differenziali successivi, ivi.
§ 2. Applicazione del calcolo differenziale all'analisi algebrico, 106, II; massimi e minimi delle funzioni, ivi; Serie di Taylor e di Maclaurin, 106, II — Formule di Lagrange e di Laplace, 107, I, II.
§ 3. Applicazione del calcolo differenziale alla geometria, Problema delle tangenti, 160, I — Asintoti, Punti singolari, 100, II — Curve osculatrici e raggio di curvatura; 171, I; Sviluppata, ivi, II.
§ 4. Principii del calcolo integrale; oggetto e notazione di esso, 170, I; sue regole fondamentali, 173, I — Integrazione delle funzioni razionali, 174, I; e di alcune irrazionali, 176, I, II; e per serie, 176, I.
§ 5. Applicazione del calcolo integrale alla geometria — Rettificazione delle curve piane; 176, I; quadratura di esse, ivi — Quadratura delle superfice e cubatura dei solidi di rivoluzione, 177, I — Quadratura delle superfice e cubatura dei solidi di forme qualunque, ivi, II.
§ 6. Principii del calcolo delle differenze finite; Calcolo diretto delle differenze, 110, I, inverso, 170, I; somme delle serie, ivi — Formule d'interpolazione, 100, I.
§ 7. Particolari istorici, 100, I; Bibliografia, 101.

V. CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

§ 1. Principii del calcolo delle probabilità — Preliminari, 101, I; nei casi più semplici ivi, II — Legge dei grandi numeri, 104, II.
§ 2. Applicazioni del calcolo delle probabilità; applicazione delle combinazioni, 100, II — Giuochi, 100, I; trovare con tentativi ripetuti il rapporto della circonferenza al diametro; ivi — Somma di alcune serie, ivi, II — Resultati medii; metodo dei minimi quadrati, 107, I, II.
§ 3. Cenni istorici, 100, I; Bibliografia, ivi, II.

VI. ARITMETICA SOCIALE

Preliminari, 100, I.
§ 1. Pesi e misure dei popoli antichi e moderni, sistema decimale o metrico francese, ivi; tavola semplicizzata delle misure del sistema metrico, 100.

Tavole delle principali monete, pesi e misure d'Italia, coi loro valori corrispondenti secondo il sistema decimale — Monete di Bologna, Firenze, Genova, Lucca, Malta, Milano, Modena, Napoli, Parma o Piacenza, 121 e 122, Roma Sardegna, Sicilia, Torino, Venezia, 122, 1 — Pesi commerciali, Bologna, Firenze, Genova, Lucca, Milano, Modena, Napoli, Parma e Piacenza, Roma, Sicilia, Torino, 122, II, Venezia, 123, 1 — Misure di capacità per i grani e le biade, negli stati e città che sopra, 126, 1 — Misura di capacità pel vino e pell'olio, *ivi*, 1, II — Misure lineari di superficie per i terreni o le fabbriche, per gli stati e città che sopra, *ivi*, II — Lineari mercantili, negli stati e città che sopra, 124, 1 — Agrarie, *ivi* — Itinerarie, *ivi*, II.

Tavola delle principali misure lineari straniere usate in commercio, in millimetri, 124, II; Corrispondenza delle misure straniere si antiche che moderne colle misure metriche francesi, 125, 1. — Tavola delle misure itinerarie moderne, 128; delle lineari antiche, 127. delle itinerario antiche, 128.

§ 2. Misura del tempo; Calendario, Calendari degli antichi, 128, II. Calendario gregoriano, 129, 1; corrispondenza di esso col repubblicano francese 133, altri calendari, 131.

§ 3. Numerario e diverse questioni relativo ad esso — Valore delle monete al pari e al chilogrammo 132, 1; Europa, Annover, Austria, Baviera, 132 1, II. Belgio, Danimarca, Francia, 133. Germania, Grecia, Inghilterra 134, 1, II; Italia, Olanda, Portogallo, Prussia. Russia, Polonia, 136, 1, II; Sassonia, Spagna, Svezia, Svizzera, Turchia, 138, 1, II; Wuttemberg, *ivi* 137, 1 — Affrica, *ivi* — America, *ivi* — Asia, *ivi*, II — Fatti diversi relativi alle monete, 137, II — Particolarità sulle monete dipendenti dal sistema decimale 138, II — Dell'interesse del denaro, 139, 1; ammortizzamento e annualità, *ivi*, II; Tavole d'interessi composti, 140; di annualità e interessi composti, 141; casse di risparmio, 142, 1; sconto, *ivi*, II; assicurazioni sulla vita o in generale, 142, 1.

§ 4. Statistica dell'Italia; superficie in miglia quadrate, 144, 1, II — Popolazione, degli Stati Sardi, Principato di Monaco, Lombardia o Venezia, Ducato di Parma, 113, 1, II. Ducato di Modena, Granducato di Toscana, 116, 1, II — (Della Toscana in particolare) Classazione dei terreni imponibili, loro superficie e reddito, tavola, *ivi* — Popolazione distribuita per famiglie, tavola, 117, e per sessi, *ivi*; repartita secondo la condizione civile, tavola, *ivi*; clero, tavola, *ivi*; aumento progressivo della popolazione in Toscana dal 1020 al 1001, tavola, 110; di quella di Francia, *ivi*; movimento della popolazione in Toscana dal 1040 al 42, tavola 119 — Finanze, *ivi*, II — Forza armata di terra e di mare, *ivi*; marina commerciale, 122, 1 — Negli stati pontificî, s. Marino, *ivi*; Regno delle Due Sicilie, 121, 1, II.

§ 5. Indicazioni storiche, 121, II; Bibliografia *ivi* e 122; 1, II.

VII. ASTRONOMIA

§ 1. Descrizione del cielo — Cenno sul sistema del mondo, 100, 1; enumerazione dei pianeti e asteroidi, *ivi*, II e 123, 1; satelliti, comete, stelle, loro distanza da noi 123, 1, II; confronto proposto dall'Herschell, 124, 1 — Il sole, sue macchie, *ivi*, II; sistemi relativi alla luce, 126, 1 — Mercurio, *ivi*; Venere, *ivi*, II; Marte, 126, 1; Gli asteroidi o nuovi pianeti; epoca della loro scoperta, *ivi*, II e 127, 1; Giove, *ivi*, II; Saturno, 128, 1; Urano, 128, 1; Nettuno, *ivi* — Satelliti, la Luna, moto, sue macchie, *ivi*, II; Satelliti degli altri pianeti, 130, 1, II. — Comete, epoca di diverse apparizioni e figure di esse 131 e 132, 1, II — Costellazioni, o metodo dell'allineazione, 132, II; stella polare, 103, 1; loro variazione di luce, *ivi*, e loro diverse grandezze, *ivi*, II; loro repartimento nello spazio, 134, 1, II; Nebulose, *ivi*, II; doppie e multiple, 133, II; Stelle cadenti, 137, II.

§ 2. Leggi dei movimenti reali degli astri; Leggi di Keplero, 138, 1; attrazione e gravità universale, *ivi*, II — Perturbazioni; ineguaglianze secolari e periodiche 102, 1, II; precessione degli equinozi e mutazione, *ivi*, II — Legge di Bode, 140, 1, II.

§ 3. Moti apparenti dei corpi celesti; Moti diurni del cielo, 142, II; posizioni della sfera, 142, 1, II — Moto annuo e spiegazione delle stagioni, *ivi* — Fasi della Luna e dei pianeti, 143, 1, II — Ecclissi, *ivi*, II — Parallasse e refrazione 144, 1, II.

§ 4. Astronomia pratica e tavole astronomiche — Punti notabili, circoli e misure sulla superficie della sfera, 244, II; definizioni, 245, I, II — Diverse specie di tempi e rivoluzioni, tempo siderale, *ivi*, II; medio, 246, I; Tavola per convertire il siderale in medio, *ivi*; altra pell'equazione del tempo, 247 — Altri elementi dei pianeti e tavola di essi, 248-9; Tavola degli elementi dei satelliti di Giove, 250; e di Saturno, *ivi*; e di Urano, 251; e della Luna, *ivi* — Strumenti e osservazioni, *ivi* e 252 — Problemi uranografici, 253, I, II — Gnomonica, *ivi*, II; Tavola della situazione del sole per tutti i tempi dell'anno, 254; delineazione di una meridiana, 255, I.

§ 5. Notizie storiche di questa scienza, 256, I, II; e 257, I — Bibliografia, *ivi*, II.